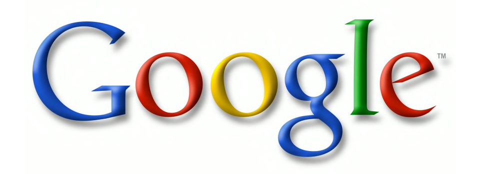
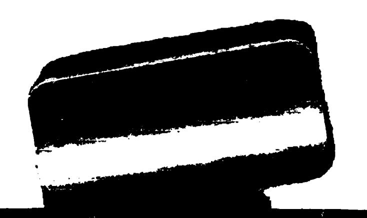
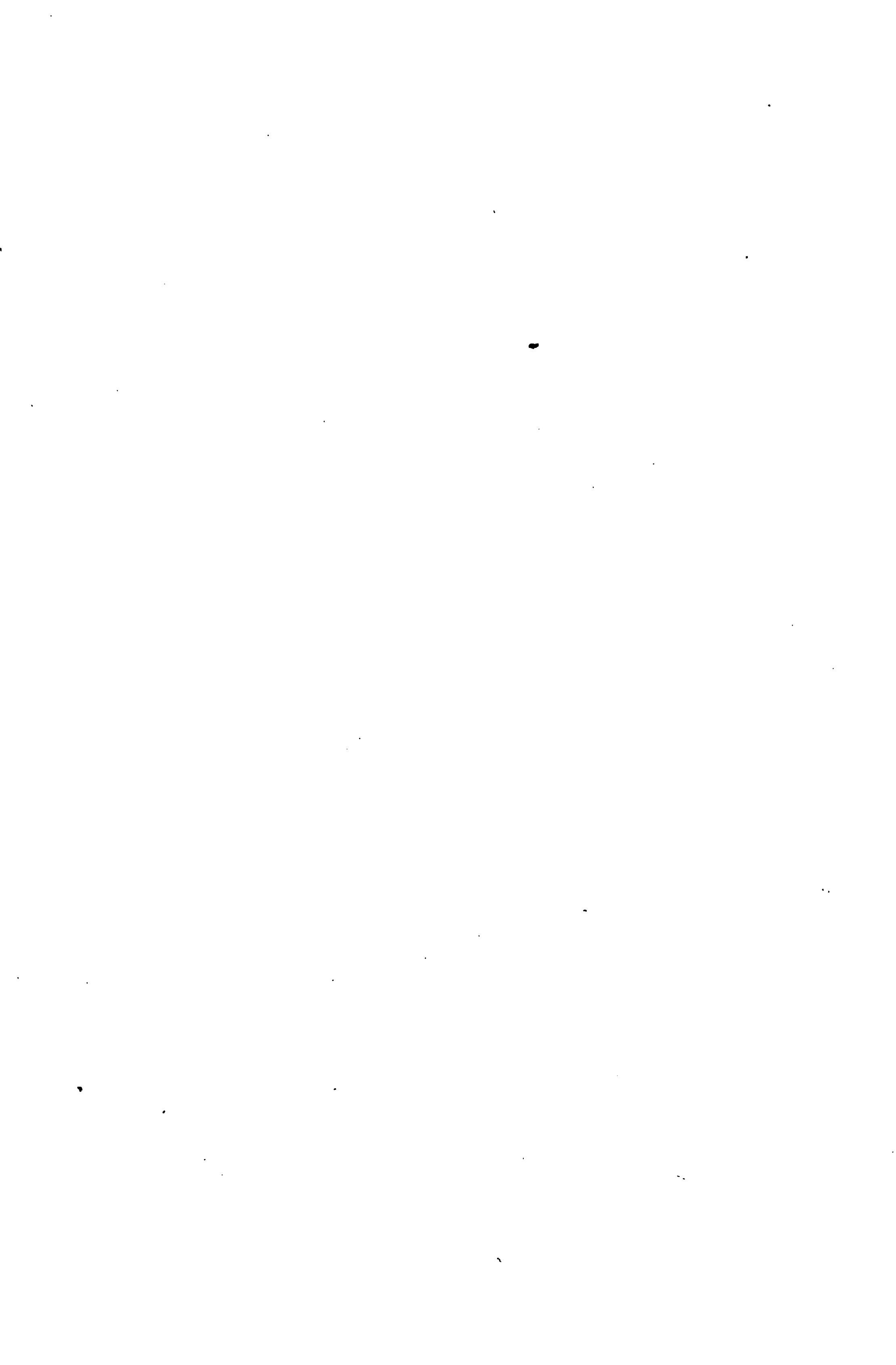




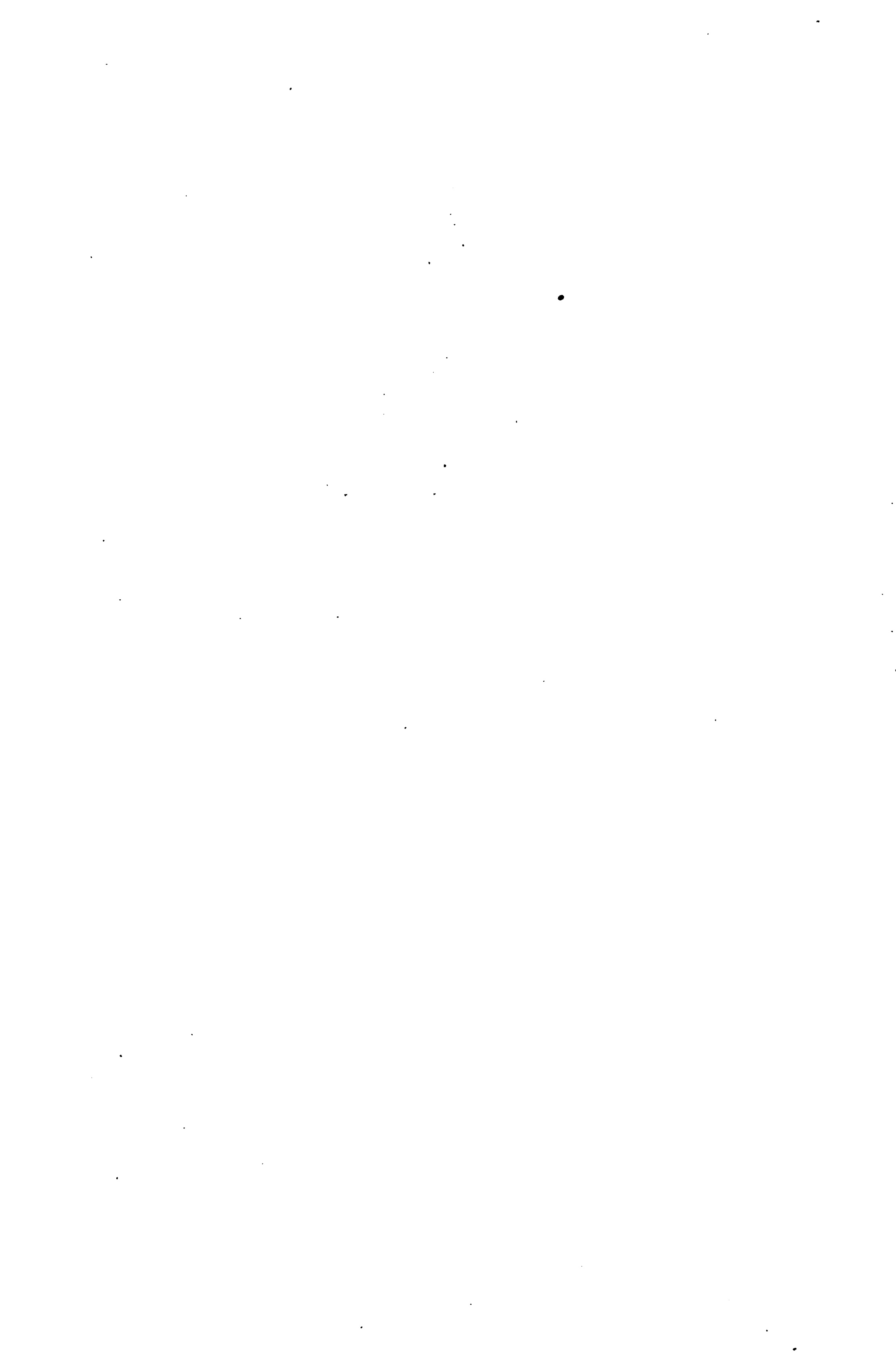




# GRUNDGESETZE

DER

# MOLEKULARPHYSIK.



# GRUNDGESETZE

DER

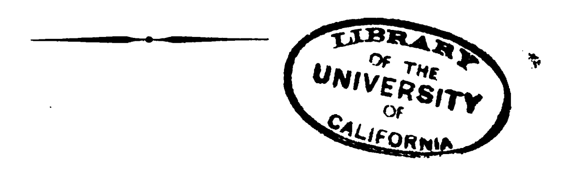
# MOLEKULARPHYSIK

VON

TH. SCHWARTZE

INGENIEUR

MIT 25 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN ABBILDUNGEN




LEIPZIG

VERLAGSBUCHHANDLUNG VON J. J. WEBER

1896

# Vorwort.

> **S'il y a encore quelque chose à désirer dans la mécanique, c'est le rapprochement et la réunion des principes qui lui servent de base, et peut-être même la démonstration rigoureuse et directe de ces principes.**
>
> **Lagrange.**

Wenn Lagrange heut noch lebte, so würde er wohl auch denselben Wunsch noch hegen, dem er vor mehr als hundert Jahren in den obigen Worten Ausdruck gegeben hat.

Ein prinzipieller Fehler in der heutigen Behandlung mechanischer Grundprinzipien besteht darin, dass starre Massen- und Punktsysteme vorausgesetzt werden und dass man die Aufgaben der Kräftezusammensetzung rein phoronomisch behandelt. Für die abstrakt mathematische Behandlung mag dies vielleicht erforderlich und genügend erscheinen, die Logik der Physik aber verlangt, dass bei der Betrachtung des Einzelnen nie das Ganze aus den Augen verloren wird.

Schon von Lagrange und nach ihm von dem gleich genialen und wohl auch noch weitsichtigeren William Rowan Hamilton ist ausdrücklich betont worden, dass in der Natur die freie gegenseitige Einwirkung der Kräfte nach Massgabe von Distanzfunktionen stattfinde und dass schliesslich alle Verhältnisse und Wirkungen im Naturganzen auf die Behandlung freier Kraftpunktsysteme

zurückzuführen sei, wobei man bezüglich der Betrachtung scheinbar unfreier Systeme die Reaktivkräfte zu berücksichtigen habe, um zu dem Begriffe eines freien Systems zu gelangen.

Die Betrachtung starrer Massen mag für die technische Mechanik wohl im allgemeinen ausreichend sein, obschon man sich gerade aus praktischen Gründen genötigt gesehen hat, in der früher rein statisch behandelten Festigkeitslehre die molekulare Arbeitsleistung der Materialien mit in die Rechnung zu ziehen. Die abstrakt wissenschaftliche, rein auf das Kausalgesetz sich begründende Behandlung der mechanisch-physikalischen Probleme verlangt dagegen die Vorstellung des freien dualen, durch Wirkung und Gegenwirkung in Schwingungen sich vollziehenden Wechselspiels der Kräfte, wobei der Begriff der Masse mit dem Kraftbegriff zu verschmelzen ist, indem der Masse nur die Bedeutung eines Zahlenfaktors der Kraft zuerkannt werden kann; dasselbe gilt auch bezüglich der Zeit, welcher wohl für den rein praktischen Zweck des Messens im Suchen nach der Erkenntnis der Grundbedingungen des Kräftespiels eine Bedeutung zukommt, die aber im höheren Sinne abstrakt wissenschaftlicher Betrachtung nur noch als ein Verhältnis der Entfaltung von Wirkung und Gegenwirkung im Wechselspiele des Kräfteausgleichs in Betracht zu ziehen ist und deren Begriff für den relativ statischen Zustand der Veränderungslosigkeit sich von selbst ausscheidet.

Die heutige Naturerkenntnis weist darauf hin, dass alle in das Gebiet der mechanischen Physik gehörigen Naturvorgänge sich in Schwingungen von Kraftpunktsystemen vollziehen, wobei die ätherische Raumkraft oder das räumliche Kraftfeld in der Kraftstrecke zur Geltung kommt und ein Wechselspiel zwischen Kraftaufnahmevermögen und Kraftabgabevermögen, von Kapazität und Selbstinduktion, im Durchlaufen einer variablen Periode zum momentanen Ausgleich gelangt, um im nächsten Moment das umgekehrte Spiel zu vollziehen.

Mag man in herkömmlicher, schulmässiger Weise ponderable Materie und imponderablen Äther unterscheiden, so steht doch wohl fest, dass die sinnlichen Erscheinungen auf einem innigen Zusammenhange und auf einer Wechselwirkung eines das Universum bildenden dualen Systems beruhen, das in Wirkung und Gegenwirkung sein Spiel treibt, wobei der in unserem Wahrnehmungsvermögen zum Vorschein kommende Unterschied der Erscheinungen nicht qualitativer, sondern rein quantitativer Art ist.

Unzweifelhaft hat das tiefere Eindringen in das Wesen der Elektrizität und des Magnetismus unsere Erkenntnis der Art und Weise des Naturwirkens in ungeahnter Weise gefördert, wozu allerdings das von Robert Mayer entdeckte Grundprinzip der Kräfteäquivalenz den Grund gelegt hat. Indessen hat sich die Elektrizitätslehre selbst bei ihrer allmählichen Entwickelung in ihren Begriffsbildungen und in der Behandlungsweise der Probleme ganz und gar dem Bedürfnis der Technik angepasst und ist in den alten oberflächlichen, bequemen, wenn auch verkehrten Anschauungsweisen der Vorgänge stecken geblieben. Als Angelpunkt dieser technischen Elektrizitätslehre darf wohl der sogenannte Ohmsche Widerstand gelten, dessen wissenschaftliche Definition mit dem aus oberflächlicher Beurteilung hergeleiteten, doch für die Praxis genügenden Begriff im totalen Widerspruche steht. Die wissenschaftliche Beurteilung dieses sogenannten Widerstandes führt auf den Begriff einer Geschwindigkeit; der Elektrotechniker aber sieht in diesem sogenannten Widerstande ein Hemmnis der Kraftentfaltung, wie es sich etwa beispielsweise in den ungeölten Lagern einer Dampfmaschine der Drehkraft entgegenstemmt. Für die wissenschaftliche Betrachtung ist dieser sogenannte Widerstand, mit Bezug auf das freie Spiel der Kräfte, einer der beiden naturnotwendigen Faktoren des dualen, auf Wirkung und Gegenwirkung beruhenden Kräftesystems. Definiert man diesen sogenannten Widerstand als Geschwindigkeit, so ist die sogenannte Stromstärke als

ein kinetischer Druck anzusehen, denn das Produkt aus Druck durch Geschwindigkeit entspricht der motorischen Kraft oder der molekularen Arbeitsgrösse, welche zwischen der Kraftstrecke des Leiters und dem Kraftfelde des Ätherraumes im Ausgleich der den Vorgang herbeiführenden Störung angehäuft wird.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass das dem Wechselspiel von Wirkung und Gegenwirkung Ausdruck gebende Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte nach dem Parallelogrammgesetz, welches sich im freien System abwechselnd durch Kombination und Kompensation vollzieht, die Grundlage der physikalischen Mechanik zu bilden hat. Mit Rücksicht hierauf hat der Verfasser auf einfache, rationelle Weise mittels des Parallelogrammgesetzes durch Einführung der sogenannten virtuellen, in Wahrheit aber aktuellen Momente eine allgemeine Kraftformel abgeleitet, welche in der Form der berühmten Maxwellschen Gleichungen sich darstellt und in welcher das duale Kräftesystem durch Vektoren, oder schwingende Kräfte gebildet wird, von denen die eine der Kombinationsresultante, die andere der Kompensationsresultante der wirksamen Intensitäten oder Kraftstärken proportional ist. Mit dieser Formel wird eine systematische Gestaltung der Mechanik im innigen Verschmelzen von Dynamik und Statik gewonnen und ein kausales Grundgesetz aufgestellt, wie dies schon von d'Alembert und Lagrange beabsichtigt worden ist.

In der That führt die vom Verfasser aufgestellte Formel zu einer Zerlegung des dualen, allen Naturvorgängen zu Grunde liegenden Kräftesystems in einen dynamischen und relativ statischen Faktor. Die Bedeutung dieser Faktoren ist natürlich im Schwingungsvorgange eine wechselnde; dieselben gelangen als Wirkung und Gegenwirkung durch an einander sich reihende variable Perioden zu momentaner Ausgleichung, wobei ein relativ statischer, auf ein unendlich kleines Zeitintervall sich beschränkender Zustand periodisch sich einstellt. Durch die Interpretation dieser

neuen Grundformel lassen sich die Formeln der mechanisch-physikalischen Grundprinzipien daraus ableiten und die Anschauungen eines Lagrange, Hamilton, Lejeune-Dirichlet, Jacobi, William Thomson, Helmholtz und anderer Forscher zum Ausdruck bringen. Insbesondere wird dadurch auch das Prinzip des Maximums und Minimums zu voller Klarheit gebracht und auf das von Lagrange aufgestellte Prinzip der grössten und kleinsten lebendigen Kraft zurückgeführt. Diese Grundformel schliesst auch das Newtonsche Gravitationsgesetz und die Formel des daraus abzuleitenden Dopplerschen Prinzips in sich ein; ferner lässt sich auch die zuerst von Clapeyron auf empirischem Wege aufgestellte Formel für Wärmestrahlung daraus ableiten, wodurch dieselbe als der Ausdruck eines allgemein gültigen Strahlungsgesetzes des relativ statischen Kraftzustandes hingestellt wird.

Weiter enthält die Grundformel das allgemeine Schwingungs- und Rotationsgesetz, wobei der Verfasser das von Lagrange aufgestellte Prinzip der Bewegung des Schwerpunktes zum Prinzip des dynamischen Massenmittelpunktes erweitert und darauf eine neue Rotationstheorie begründet.

Endlich wird aber auch noch durch diese neue Grundformel der Nachweis geführt, dass das vom philosophischen Standpunkte bereits angefochtene Gesetz der Erhaltung der Kraft oder — wenn man die moderne, aber keineswegs zu rechtfertigende Ausdrucksweise gebrauchen will — das Gesetz der Erhaltung der Energie, nur innerhalb der Beobachtungsgrenzen Gültigkeit hat und trotz seiner eminenten praktischen Bedeutung doch nicht als ein allgemeines Grundgesetz des Naturwirkens aufgestellt werden darf. Es gilt nämlich dieses Gesetz nur für ein absolut isoliertes, in abstrakt adiabatischer Zustandsänderung befindliches Kräftesystem. In der Natur ist aber ein solches System nicht denkbar, weil alle einzelnen, der Beobachtung unterworfenen Kräftesysteme mit dem unendlichen Naturganzen in Wechselbeziehung und im kausalen

Zusammenhange stehen, so dass von einem Grundgesetz der Erhaltung der Kraft mit Rücksicht auf die Unendlichkeit nicht die Rede sein kann.

Als Anhang entwickelt der Verfasser eine auf logische Gründe und auf thatsächliche Untersuchungen sich stützende Widerlegung der Newtonschen, in der heutigen Physik als Dogma aufgestellten Hypothese der Vielfarbigkeit des weissen und daher wohl als einfarbig zu betrachtenden Lichtes, wodurch die Goethesche, auch von Schopenhauer anerkannte Farbentheorie zu Ehren kommt.

Die Anschauungen des Verfassers, welche derselbe zum Teil bereits in seinem in diesem Jahre im gleichen Verlag erschienenen Buch „Die Elektrizität und ihre praktische Verwendung“ entwickelt hat, haben bereits Anerkennung seitens namhafter Physiker gefunden.

**Der Verfasser.**

# Inhaltsverzeichnis.

---

## Berichtigungen.

S. 17 Z. 3 v. u.: Mayer statt Meyer.
„ 18 „ 19 v. u.: Teleskop statt Toleskop.
„ 33 „ 7 v. u.: Hierbei zerfällt statt Hierbei ist.
„ 34 „ 10 v. o.: $1._{41}$ statt $1._{47}$.
„ 34 „ 15 v. o.: je statt ja.
„ 39 „ 9 v. o.: ist vor $v^2$ das Wort „Kraft“ zu setzen.
„ 144 „ 1 v. o.: $\varphi$ statt $\varrho$.

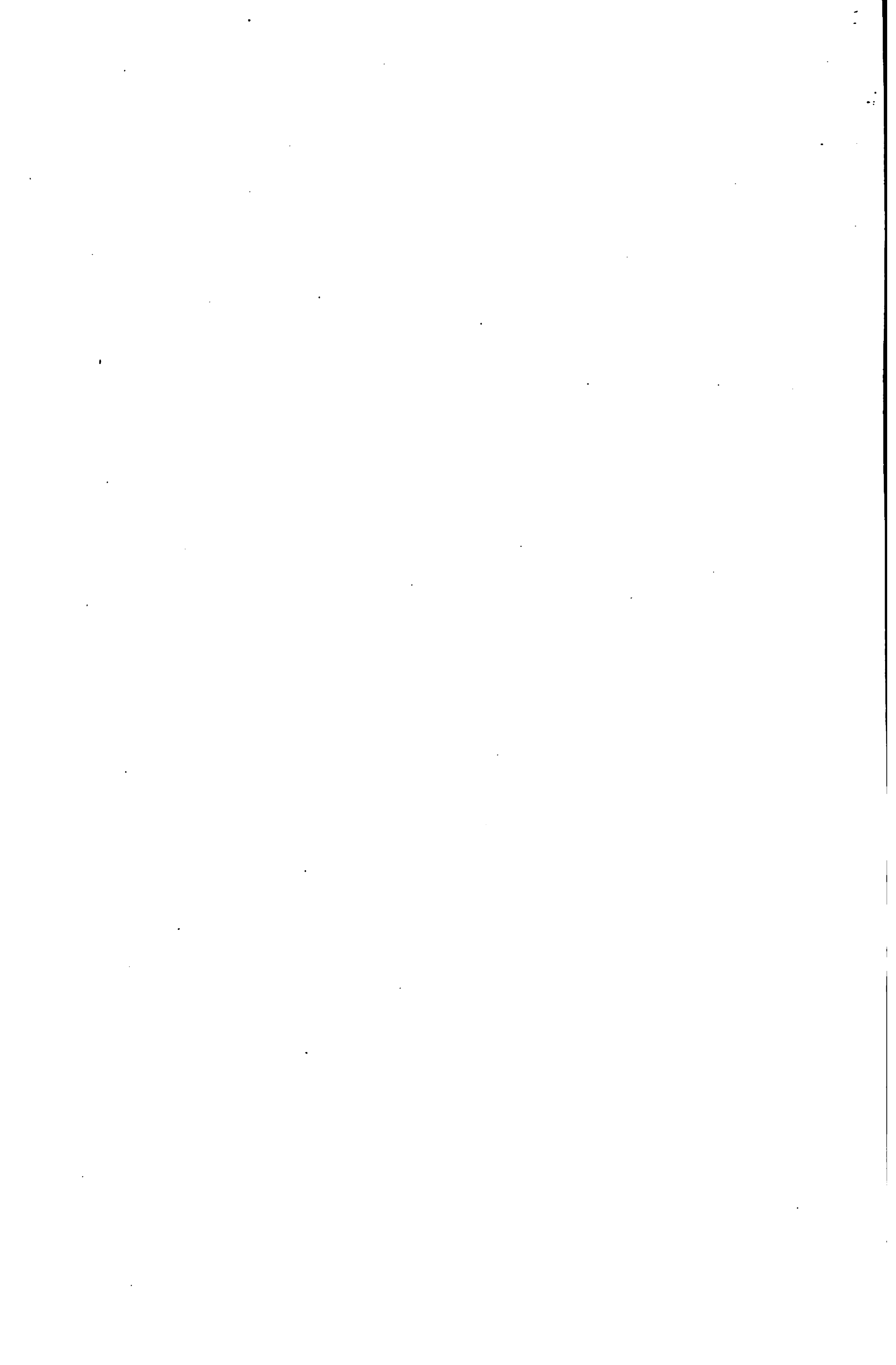
---

GRUNDGESETZE

DER

# MOLEKULARPHYSIK.

---



# Einleitung.

1. Die wissenschaftliche Mechanik ist aus dem uralten Stamme der Geometrie als ein Zweig entsprossen. In ihren ersten Sätzen, die in den Resten der Schriften des scharfsinnigen Syrakusischen Mathematikers Archimedes uns überkommen sind, hat nur die starre Statik Ausdruck gefunden: ein Hinblick auf die Möglichkeit von Bewegungen, welche in den tiefer gehenden Prinzipien der Mechanik zur Geltung gelangen, ist dem altgriechischen Geometer fremd geblieben. Doch haben in dieser einseitigen, abstrakt mathematischen und daher unphysikalischen Weise auch Mathematiker der Neuzeit weiter die mechanische Wissenschaft zu kultivieren versucht, indem sie sich mit der Behandlung starrer Massen- und Punktsysteme befassten. Hiermit war wohl das abstrakt mathematische Exerzitium gepflegt, aber die als Grundlage der Physik zu betrachtende Mechanik hatte keinen Gewinn davon.

Der antike Mechaniker widmete seine Betrachtungen nur der lastenden Schwere der Körper, weil ihm diese die ganze Körperwelt beeinflussende und in technischer Beziehung bedeutsam wirkende Kraft am auffälligsten und nach rein geometrischen, längst bekannten Regeln am bequemsten zu behandeln war. So wurde von den antiken Statikern der Erfahrungsbegriff des Körpergewichts mit den geometrischen Eigenschaften der Körper in Verbindung gebracht, als Konzentrationsort des Körpergewichts der Schwerpunkt ins Auge gefasst und selbst das zur Betrachtung von Schwingungen anregende Hebelgesetz im Sinne starrer Statik in dem als Axiom aufgestellten Satze formuliert, dass gleichgrosse Gewichte in gleicher Entfernung vom Unterstützungspunkte zu einander im Gleichgewichte sind. Hiermit ist der Hebel, dessen Prinzip das

ganze Rotationsproblem in sich birgt, der Reihe starr geometrischer Gebilde einverleibt und das tiefere Eindringen der Betrachtung unter Berücksichtigung der schwieriger aufzuklärenden Bewegungsgesetze beseitigt. Auch die heut noch übliche Behandlungsweise der mechanischen Betrachtungen ist in diesem Sinne noch von dem antiken Geiste beseelt.

Nach alledem ist in der antiken Mechanik keine Formulierung irgend eines lebendig produktiven Erkenntnisprinzips zu finden.

Es ist nicht zu verkennen, dass für die Entwickelung der Mechanik durch die Archimedischen Lehrsätze für die Begründung einer wirklich mechanischen Wissenschaft wertvolle Anregungen gegeben waren. Zur selbständigen Wissenschaft ist aber die Mechanik erst durch die dynamische Auffassung der mechanischen Vorgänge durch das Genie eines Galilei erhoben worden.

Wohl hat der grosse Pisaner Vorgänger gehabt, welche sich in weniger befangener Weise, als der antike Geometer, mit Fragen der theoretischen und praktischen Mechanik befassten, denn der Fortschritt der Wissenschaft ist immer ein stetiger. Auch wenn zuweilen scheinbar sprungweis neue Wissenschaftsgebiete von Einzelnen gewonnen werden, wird sich immer nachweisen lassen, dass schon vorher der Gedankengang Anderer sich in derselben Richtung bewegt hatte. So ist vor Allen als ein Vorgänger Galileis sein Landsmann der berühmte Florentiner Künstler und Forscher Lionardo da Vinci zu nennen, der 112 Jahre vor Galilei das Licht der Welt erblickte. Ausser seinen geistreichen Spezialforschungen über die Bewegungslehre und seinen Leistungen als Maschinenkonstrukteur ist seine rationelle Vorstellungsweise über die allgemeine Methode zur Erlangung eines richtigen Naturwissens zu rühmen. Er hatte bereits das stetige Wachsen der Geschwindigkeit fallender Körper richtig erkannt und das Bewegungsgesetz auf der Schiefebene festgestellt. Von Interesse sind auch seine Auffassungen über das Kräfteverhältnis, welches der späteren, bestimmteren Gestaltung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten nahekommt. Immerhin ist aber Galilei als der Begründer der Dynamik, das ist der Lehre von den beschleunigenden Kräften zu rühmen. Von fundamentaler Bedeutung für die Entwickelung der Mechanik ist die Rolle, welche in Galileis Untersuchungen seinen Betrachtungen über den Kraftbegriff zukommt. Dieser Begriff ist in der That bei ihm, das ist vor etwa dreihundert Jahren, klarer gestaltet gewesen, als dies in der heutigen Mechanik der Fall ist.

---

## Erstes Kapitel.

# Die Entwickelung der mechanischen Grundprinzipien.

2. Die geläufige Definition der Kraft — sagt W. Wundt in seiner Methodenlehre*) — als einer Ursache von Bewegung ist nicht nur ungenügend, sondern, sobald man den exakten Kausalbegriff zu Grunde legt, geradezu falsch. Denn hier ist die Ursache einer Bewegung immer nur eine andere, vorausgegangene Bewegung.

Der Kraftbegriff der neueren Mechanik ist von Galilei festgestellt und von Newton weiter ausgebildet worden. Indem Galilei von dem subjektiven Gefühl der Muskelkraft ausging, begründete er den Begriff der Kraft auf einen Bewegungsantrieb, den eine Masse durch irgend eine Ursache, insbesondere aber durch eine Stosswirkung erfährt.

Hiermit gewann er das gegenwärtig noch gebräuchliche Mass der Kraft im Produkt, der Masse in ihrer Beschleunigung. Ein Lieblingsausdruck für eine augenblickliche Kraftwirkung ist bei Galilei das Wort impeto, zu deutsch Antrieb oder Andrang; ausserdem gebraucht er aber auch noch oft das Wort „Moment". Der Begriff des Momentes fällt bei ihm mit dem Begriffe der Kraft zusammen. Der um die spätere Systematisierung und logische Ausbildung der Mechanik hoch verdiente Lagrange hebt ganz besonders hervor, dass bei Galilei der Begriff des Moments in der Bedeutung von Kraft weit natürlicher gestaltet gewesen sei, als die speziellere Idee, welche in dem überwiegenden Sprachgebrauche der späteren Mechaniker kurzweg mit diesem Ausdrucke oder auch als statisches Moment bezeichnet wird. Bis zu einem gewissen Punkte ist die ursprüngliche Idee Galileis in dem virtuellen Momente, wie dasselbe in der modernen Mechanik verstanden wird, seit dem Erscheinen des Lagrangeschen Hauptwerks wiederum zur Geltung gelangt. Demnach ist der Begriff des Moments, den Galilei vor Augen hatte, noch allgemeiner und natürlicher gestaltet und — wie E. Dühring in seiner kritischen Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik**) hervorhebt — sogar noch weitergehend gedacht, als Lagrange sich dies vorgestellt hat.

Galilei definiert selbst den Begriff des Moments als die Kraft oder Wirkung, mit welcher ein Motor bewegt wird und das Bewegte der Vermehrung der Bewegung widersteht. Und weiter bemerkt er darüber, dass diese Kraft aber nicht nur von der Schwere, sondern auch von der Geschwindigkeit der Bewegung und von den verschiedenen Richtungen

*) W. Wundt, „Logik", 2. Bd. Methodenlehre. 1883. S. 365.
**) 2. Aufl. S. 23.

der Raumstrecken abhängig sei, in denen die Bewegung vor sich geht. Hierdurch ist das Moment als eine elementare Wirkungsgrösse gekennzeichnet, die mit der räumlichen Einwirkung in engster Beziehung steht und der später noch mehr hervorzuhebende Begriff der Kraftstrecke kommt bereits zur Geltung.

3. Auf Grund der Newtonschen Gravitationstheorie hat sich der Begriff der stossweis wirkenden Kraft in den Begriff der Fernewirkung umgestaltet. Es wird dadurch die Kraft zu dem nach dem Galileischen Kraftmesser zu bestimmenden Bewegungsantriebe einer Masse durch eine davon räumlich getrennte Masse, wobei zugleich anstatt der räumlichen Beziehungen der Massen an sich die Beziehungen der Massenmittelpunkte eingeführt werden. Mit Bezug hierauf sind alle Naturkräfte als Zentralkräfte anzusehen, welche von ihrem Sitze aus sich in kugelförmigen Niveau- oder Potentialflächen im Raume ausbreiten, so dass — wie Faraday sich ausdrückt — jedes Atom, das heisst jedes Kraftelement, bis in relativ unendliche Ferne ringsum im Raume seine Wirkung ausbreitet. Hierdurch wird der Raum zu einem Kraftfelde, indem jeder Raumpunkt die Fähigkeit besitzt, in anderen Raumpunkten Beschleunigungen hervorzurufen.

Galilei selbst war sich der Bedeutung seiner Entdeckungen in den Naturprinzipien wohl bewusst. In seinen Discorsi bemerkt er darüber, dass von seinen Vorgängern wenig davon beobachtet oder bewiesen worden sei. Nur Einiges von geringerer Bedeutung sei vor ihm bekannt gewesen, wie z. B. die Thatsache, dass die natürliche Bewegung eines herabfallenden schweren Körpers in ihrer Geschwindigkeit fortwährend zunehme; aber man habe noch nicht gewusst, in welchem Verhältnis diese Geschwindigkeitszunahme stattfinde, denn Niemand habe bisher den Beweis dafür geliefert, dass die von dem aus der Ruhelage gekommenen Beweglichen in gleichen Zeiten durchlaufenen Raumstrecken unter sich das Verhältnis der von der Einheit ausgehenden ungeraden Zahlen einhalten. Man habe bisher wohl beobachtet, dass die Geschosse oder geworfenen Körper eine krumme Bahn durchlaufen, aber man habe noch nicht nachgewiesen, dass diese Bahn eine Parabel sei. Und weiter fügt er hinzu: „Die Richtigkeit dieser Sätze und noch vieles andere Wissenswerte wird von mir bewiesen und, was wohl noch höher zu schätzen ist, es wird von mir der Zugang zu einer höchst umfassenden und vorzüglichen Wissenschaft erschlossen, für welche diese meine Arbeiten die Grundlagen bilden und in welcher tiefer eindringende Geister des Verborgenern und Entlegenern sich später bemeistern werden“.

3. Die Zusammensetzung der Momente oder Kräfte wurde von Galilei unter der Annahme rechtwinkligen Zusammenwirkens mit

Bezug auf die parabolische Wurfbewegung zur Anwendung gebracht und zwar auf Grund der Voraussetzung, dass die Momente oder Antriebe von zwei gleichförmigen Bewegungen, von denen die eine horizontal, die andere vertikal gerichtet ist, ein Moment ergeben, welches dem Produkt oder der Potenz dieser beiden Bewegungen gleich ist. Der Beweis wird in den Discorsi in der Weise geführt, dass die Zusammensetzung der Bewegungen in der Diagonale des Rechtecks stattfindet, welches aus den Grössen der Seitenmomente, das heisst der diesen Seitenkräften entsprechenden Geschwindigkeiten gebildet wird, und aus der Grösse dieser Diagonale wird auf das in derselben zur Wirkung kommende Gesamtmoment zurückgeschlossen*).

Bis heute ist man über diese von Galilei zuerst in Anwendung gebrachte Betrachtungsweise des Kräfteparallelogramms nicht hinausgekommen und der tiefere Sinn, den Galilei in dem Ausdruck „Moment" zur Geltung zu bringen suchte, ist vollständig verloren gegangen. Galilei wollte damit nichts anderes als die Differentiation der Kraft bezeichnen, wie aus seinen Bemühungen, den geeignetsten Ausdruck dafür in virtù, talento, efficacia, energia zu finden, deutlich hervorgeht. Er verstand darunter sowohl die Fähigkeit zur Kraftbethätigung, als auch die thatsächliche Wirkung der Kräfte, und wollte damit keine blosse abstrakt statisch gedachte Möglichkeit zur Bewegung, sondern eine elementare Wirkungsgrösse von relativ unendlich kleiner Geschwindigkeitsentwickelung zur Vorstellung bringen, wobei von ihm der Gedanke an oszillatorische Bewegungsäusserung schon gehegt worden ist, wie aus manchen seiner Andeutungen hervorgeht.

4. Gegenwärtig ist man der Ansicht, dass der allgemeine, in allen einzelnen Sätzen über die Zusammensetzung der Kräfte zur Geltung kommende Grundsatz sich nur auf die geometrischen Eigenschaften der erzeugten Bewegungen beziehe, so dass von den Kräften selbst vollständig abgesehen werden könne. Infolgedessen wird die Zusammensetzung der Kräfte nur im rein phoronomischen Sinne betrachtet und angenommen, dass damit nur die allgemeinsten Sätze über die Zusammensetzung von Bewegungen zum Ausdruck gelangen. W. Wundt bemerkt darüber in seiner Methodenlehre**) folgendes: „In der That ist schon um deswillen diese phoronomische Gestaltung der Prinzipien die „allein korrekte" Form, weil die veranschaulichenden Beweise für dieselben lediglich phoronomischer Art sind, so dass die Einführung des Kraftbegriffs hier eine überflüssige Rolle spielt".

---

*) E. Dühring, a. a. O., S. 36.
**) „Logik", 2. Bd., S. 272.

Und weiter fährt Wundt fort: „Dies führt uns auf denjenigen Punkt, in dem die systematische Gestaltung, welche die Mechanik bei Lagrange gefunden, ungenügend geblieben ist. Er betrifft die logische Scheidung der verschiedenen Gebiete der Mechanik nach den in ihnen vorausgesetzten Grundbegriffen, eine Scheidung, welche von ungleich grösserer Wichtigkeit ist als die alte Trennung in Statik und Dynamik, da diese beiden in ihrer neueren Entwickelung durchaus die nämlichen Grundbegriffe zur Anwendung bringen. Mit Rücksicht hierauf hat bereits in einzelnen Darstellungen der Mechanik eine Gliederung Platz gegriffen, welche in der That bestimmt zu sein scheint, an die Stelle jener älteren Einteilung in Statik und Dynamik zu treten; die Gliederung nämlich in Phoronomie (oder Kinematik) und Dynamik. Von ihnen hat sich die erstere mit den Gesetzen der Bewegung als solcher zu beschäftigen, abgesehen also von den Ursachen, welche Bewegung erzeugen, und von den physischen Eigenschaften der Körper, an denen sie stattfinden. Die Phoronomie in diesem Sinne ist eine der Geometrie verwandte Disziplin, auch sie bezieht sich nur auf reine Anschauungen, sie fügt aber zu den geometrischen Grundbegriffen den Begriff der Bewegung hinzu. Auf diesem letzteren Umstande beruht ihre Selbständigkeit, welche in der Existenz besonderer phoronomischer Axiome ihren Ausdruck findet. Diese Axiome, zu denen neben dem Satze von der Relativität der Bewegung vor allem das Prinzip der Zusammensetzung der Bewegungen gehört, haben gleich den geometrischen Axiomen eine anschauliche Gewissheit, das heisst: ihre Richtigkeit kann nur durch den unmittelbaren Hinweis auf die Anschauung festgestellt werden. Die Dynamik dagegen, von welcher die Statik nur einen Teil bildet, setzt ausser den phoronomischen Begriffen noch die beiden Begriffe der Kraft und der Masse voraus. Auf diese Begriffe beziehen sich zwei andere Fundamentalgesetze der Mechanik, welche darum als spezifisch dynamische Axiome bezeichnet werden können; nämlich das Beharrungsgesetz und der Satz von der Gleichheit der Aktion und Reaktion. Aus ihnen und aus den phoronomischen Axiomen können die anderen dynamischen Prinzipien, insbesondere die verschiedenen Erhaltungsprinzipien abgeleitet werden. Dies schliesst übrigens nicht aus, dass sich für einzelne dieser Erhaltungsprinzipien, wie namentlich für den Satz von der Erhaltung der Energie, vollständige, wenn auch keine zwingenden Gründe der Evidenz in denjenigen Eigenschaften vorfinden, welche der materielle Substanzbegriff der Raumanschauung entlehnt".

In diesen Auseinandersetzungen ist übersehen worden, dass die Bewegung den Kraftbegriff in sich schliesst und gar nicht davon

getrennt werden kann, so dass die Bewegungsgesetze auch Kraftgesetze sind. So wenig es vom rein wissenschaftlichen Standpunkte statthaft ist, die Mechanik in eine Statik und Dynamik auseinanderzureissen, ebensowenig ist es statthaft, die Bewegungslehre von der Dynamik oder eigentlichen Mechanik oder, noch deutlicher ausgedrückt, von der mechanischen Physik zu trennen. Mit Recht wird von E. Dühring*) die Dynamik ganz allgemein als eine Lehre von den Gesetzen und Ursachen der Bewegung aufgefasst, gleichviel ob es sich um die Kombination blosser Beharrungsbewegungen oder um Ortsveränderungen unter dem Einflusse stets von neuem wirkender Kräfte handelt.

Was ferner aber die Unterscheidung der Begriffe von Kraft und Masse anbelangt, welche den nach dem phoronomisch festgestellten Axiomen nach Wundts Anschauung beizufügen sind, um zu den spezifisch dynamischen Prinzipien zu gelangen, so ist darauf hinzuweisen, dass im Sinne der Mechanik die Masse durch Newtons vis inertiae, durch ihre Trägheitskraft unter den Kraftbegriff fällt, wie ja auch unter einer elektrischen oder magnetischen Masse oder Ladung eine Kraft zu verstehen ist. In der That messen wir die Masse gleichwie die Kraft nur durch eine Bewegung, nämlich durch die in der ersten Zeiteinheit der Freifallbewegung erlangte Geschwindigkeit, welcher wir Kraft und Masse proportional setzen, so dass der so bestimmten Kraft- oder Masseneinheit $g$ nur noch ein Zahlenfaktor $M$ oder $m$ vorzusetzen ist, um zu dem Begriff einer Kraft- oder Massenmehrheit zu gelangen. Die Prinzipien der Dynamik sind aber einfach für die Kraft- oder Masseneinheit festzustellen, so dass der Zusatz des Zahlenfaktors $M$ oder $m$ zu den Geschwindigkeitsgrössen $v$ oder $v^2$ ganz unnötig ist, indem diese an und für sich den Kraftbegriff einschliesslich des Massenbegriffs zum Ausdruck bringen.

An einer bereits auf S. 3 aufgeführten Stelle seiner Methodenlehre definiert übrigens Wundt selbst die Kraft als Bewegung, so dass sich hier eine Unklarheit in den Begriffen dokumentiert, wie sie in allen heutigen Lehrbüchern der Mechanik und Physik, ganz besonders aber auch in den Büchern der Elektrizitätslehre sich bemerkbar macht.

5. Es ist nicht unwichtig sich der Schwierigkeiten bewusst zu sein, mit denen Galilei zu kämpfen hatte, um durch Nachdenken auf die heute fast als selbstverständlich erachteten ersten Grundsätze der von ihm geschaffenen Dynamik zu kommen, denn zu seiner Zeit war man auf rein statische Anschauungen beschränkt; ja man darf wohl behaupten, dass auch unsere heutige Mechanik trotz der insbesondere behandelten

---

*) „Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik." 3. Aufl. S. 17.

Dynamik in der Anschauungsweise der Statik befangen ist, da immer nur starre Massen und Punktsysteme in Betracht gezogen werden und die Kraftäusserungen nur mit Bezug auf starres Gegenüberstehen von Wirkung und Gegenwirkung in Betracht kommen. Um diese statische Anschauungsweise in der heutigen sogenannten Dynamik zu charakterisieren, lassen wir die Behandlung des Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung bei Bewegung nach der von Schlömilch besorgten Herausgabe des Lehrbuchs der analytischen Mechanik von Duhamel hier folgen, indem gerade dieses Buch als eines der besten über diesen Wissenschaftszweig angesehen wird:

„Ist ein materieller Punkt der Wirkung einer konstanten Kraft unterworfen, die ihn nötigt, mit gleichförmig beschleunigter Bewegung eine gerade Linie zu durchlaufen, so kann man diese Kraft, welcher Art sie auch sein möge, durch einen Körper ersetzen, welcher im stande ist, dem materiellen Punkte durch Stoss oder Zug eine gleiche Bewegung zu verleihen. Die durch die Verbindung beider Körper erzeugte Kraft muss in diesem Falle die nämliche sein wie die erste. Führt man z. B. einen derartigen Versuch aus, indem man einen Körper mittels einer Feder stösst oder zieht, so wird man dieselbe immer zu einem dauernden Zustande der Spannung gelangen sehen, so dass sie in jedem Augenblicke durch Kräfte affiziert erscheint, welche im Gleichgewichte und folglich gleich und entgegengesetzt sind. Die an dem einen Endpunkte der Feder hervortretende Wirkung, durch welche die Beschleunigung erzeugt wird, ist also immer von einer anderen gleichen und entgegengesetzten Kraft begleitet, die an demjenigen Ende wirkt, wo der Körper angebracht ist. Diese letztere Kraft wird die Gegenwirkung des Körpers genannt, und Versuche in der angegebenen Art beweisen, dass die Wirkung beständig gleich ist der Gegenwirkung bei jeder Bewegung, die durch eine konstante Kraft hervorgebracht wird, folglich auch in dem Falle, wenn die Kraft veränderlich ist, weil man sie immer während eines unendlich kleinen Zeitraumes als konstant ansehen darf. Diese Gegenwirkung nennt man die Trägheitskraft."

Es wird hierbei nicht hervorgehoben, dass nach der Forderung der Logik die Ursache stets der Wirkung vorausgehen muss und dass bei absoluter und steter Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung überhaupt keine Bewegungsänderung eintreten kann. Wenn die Wirkung beständig gleich der Gegenwirkung ist, wie oben nach Duhamels Lehrbuch behauptet wird, so ist ein rein statisches Gleichgewicht vorhanden. Überhaupt ist aber die Geschwindigkeit, insofern man darunter die Gleichheit des in jeder Zeiteinheit durchlaufenen Weges versteht,

kein Kriterium des dynamischen Zustandes, sondern der Ausdruck eines relativ statischen, mit dem Zustande der Ruhe identischen Zustandes, insofern dabei keine Kraftaufnahme oder Kraftabgabe seitens der bewegten Masse und also überhaupt keine Kraftänderung oder Kraftübertragung stattfindet. Ein dynamischer Zustand ist nur in dem Falle vorhanden, wo die Arbeitsfaktoren Druck und Geschwindigkeit einer Änderung unterliegen, die natürlich sich stets im umgekehrten Verhältnis dieser Faktoren vollzieht, wobei die Ausgleichung der beiden Faktoren periodisch nach gewissen Zeitintervallen stattfindet.

6. Mit Bezug hierauf bieten zwei Arbeiten des berühmten Analytikers G. P. Lejeune-Dirichlet ein besonderes Interesse. Die eine dieser Arbeiten ist betitelt: „Über die Stabilität des Gleichgewichts“ *). Es wird darin diese Stabilität aus dem Begriff des Maximums abgeleitet, welches vorhanden ist, wenn die Arbeitsfaktoren gleiche Grösse erlangt haben. Die andere Arbeit behandelt die Bewegung einer festen Kugel in einer unendlichen, unzusammendrückbaren Flüssigkeit (worunter nur der Äther zu verstehen ist) und führt zu dem mit den gewöhnlichen Vorstellungen über einen derartigen Vorgang vollständig im Widerspruch stehenden Ergebnis, dass der Widerstand überhaupt gar nicht von der vorhandenen Bewegung, sondern einzig und allein von der im nächsten Zeitteile hervorzubringenden Bewegungsänderung abhängig ist. Dieser Widerstand entspricht also nicht der Vorstellung, welche man sich von der Wirkung eines flüssigen Mediums auf einen in ihm bewegten festen Körper zu machen pflegt, und nach welcher ein Widerstand auch dann schon vorhanden und zu überwinden ist, wenn die in einem Zeitmoment stattfindende Bewegung für den nächsten Zeitabschnitt nicht abgeändert wird, wogegen nach Dirichlets Beweisführung die Bewegung des festen Körpers augenblicklich in eine geradlinige und gleichförmige übergeht, sobald die beschleunigende Kraft zu wirken aufhört**).

7. Die statische Betrachtungsweise in der heutigen Dynamik tritt ganz besonders auch in dem Lehrsatze über die Kreisbewegung hervor, wobei angenommen wird, dass ein in der Kreisbahn laufender Kraftpunkt eine gleichförmige Geschwindigkeit besitzen könne. Hierbei wird ganz übersehen, dass jede Richtungsänderung einer Bewegung auch eine Geschwindigkeitsänderung bedingt, indem die Geschwindigkeitsänderung nur infolge einer Änderung der Kraftwirkung eintreten kann***).

---

*) Crelles Journal, Bd. 32 (1846).

**) Monatsschrift der Berliner Akademie für 1852. Man vergl. auch E. Dühring, a. a. O., S. 433.

***) Schwartze, „Die Lehre von der Elektrizität“. Leipzig 1895. S. 58.

Es wird hierdurch das von Galilei bei allen seinen Betrachtungen über das Wesen der Kraftwirkung stillschweigend vorausgesetzte Beharrungs- oder Trägheitsprinzip gekennzeichnet. Dieses Prinzip wird aber von dem grossen Dynamiker bei Betrachtung der parabolischen Wurfbewegung ausdrücklich und in klarer Weise hervorgehoben, indem derselbe die Fortdauer und Unzerstörbarkeit der gleichförmigen Bewegung dieser Betrachtung zu Grunde legt. Der Ruhezustand und der Zustand der gleichförmigen Geschwindigkeit schliessen aber streng genommen die Bewegung aus, wenn man unter Bewegung die in sich selbst stattfindende Zustandsänderung versteht und nicht aus der von dem Zustande selbst ganz unabhängigen Ortsänderung den Begriff der Bewegung ableiten will. Die Bewegung beruht auf einer Kraftänderung, die Geschwindigkeit schliesst die Kraftänderung aus, denn es wird darunter ein beharrender Zustand verstanden, der durch die Beendigung einer Kraftwirkung oder einer Bewegung zum Ausdruck kommt. Die Geschwindigkeit eines der Schwerkraftswirkung unterworfenen Körpers wird mittels der Fallmaschine dadurch gemessen, dass man die Wirkung der beschleunigenden Kraft durch Beseitigung des diese Kraft hervorrufenden Übergewichts aufhebt und somit das Bewegende nulliert, also die Bewegung selbst beseitigt, so dass die Geschwindigkeit zum Ausdruck gelangt. Mit Bezug auf diese Anschauungsweise sind Ruhe und Geschwindigkeit identische Zustände statischer Kraftwirkung. Beide Zustände sind nur dadurch unterschieden, dass im Zustande der Ruhe im Arbeitsprodukte der Kraft der Faktor des Druckes oder der Bewegungshemmung im Maximum und der Faktor der Bewegung im Minimum sich befindet, während im Zustande der Geschwindigkeit, die hier als ein gleichförmiger, statischer Zustand vorausgesetzt wird, der Faktor der Bewegung in das Maximum und der Faktor der Bewegungshemmung oder des Druckes in das Minimum eingetreten ist, wie aus dem oben erwähnten von Lejeune-Dirichlet aufgestellten Prinzip hervorgeht und wie weiterhin an der Pendelschwingung in anschaulicher Weise nachgewiesen werden wird.

8. Indem durch die Anerkennung der mechanischen Wärmetheorie die Annahme der statisch durch den kraftlosen Raum sich fortpflanzend gedachten Kräfte als ungereimt erschien, kehrte man zur Anschauungsweise der antiken Atomistik zurück, welche die Naturvorgänge durch materielle Stosswirkungen zu erklären gedachte, wobei man die Starrheit der ponderablen Materie durch die Annahme elastischer Ätherumhüllungen der Atome in der Vorstellung beseitigte und überhaupt den Äther, der ja schon in der Undulationstheorie vorausgesetzt worden war, als Krafttransmissionsmittel sich dachte. Somit sollten die Vor-

stellungen der statischen Wirkungen von fernwirkenden Anziehungs- und Abstossungskräften eigentlich überwunden sein, jedoch spuken dieselben noch immer fort. Bei alledem kam man aber doch zu der Einsicht, dass mit dem bisherigen Kraftbegriff nicht mehr auszukommen ist. Anstatt aber diesen Begriff der Erfahrung gemäss zu modifizieren, führte man, weil eben die Begriffe fehlten, ein neues Wort ein, indem man das deutsche Wort Kraft gräzisierte, das heisst dafür das Wort „Energie“ setzte. Man macht dabei den Unterschied, dass man unter Kraft die Ursache der Änderung in dem Bewegungszustand einer Masse versteht und mit Energie die Wirkung einer Bewegung unter dem Begriff der Arbeit bezeichnen will. Wenn aber jede Bewegung als die Wirkung einer vorausgegangenen und daher als Ursache der Geschwindigkeitsänderung wirksam gewesenen Bewegung betrachtet wird, so kann eine Änderung eines Bewegungszustandes nur auf der stattgefundenen Änderung eines anderen Bewegungszustandes beruhen und daher muss jede Kraft schon an und für sich als eine Arbeitsgrösse betrachtet werden, so dass die Begriffe Kraft und Arbeit zusammenfallen und das Wort „Energie“, das ja auch nur als Bezeichnung des Kraftbegriffs in der griechischen Sprache dient, ganz überflüssig wird. In der That hat man im gewöhnlichen Sprachgebrauche schon die Begriffe von Arbeit und Kraft identifiziert, denn man spricht von einer lebendigen Kraft, einer Arbeitskraft oder Bewegungskraft bezw. motorischen Kraft, Muskelkraft, Lebenskraft, Keimkraft, Wasserkraft, Wärmekraft, Dampfkraft u. s. w.

9. Das Wort „Kraft“ bezeichnet also in anerkannter Bedeutung die Arbeitsfähigkeit eines Massen- oder Kraftsystems und es liegt darin die Bedeutung der Dualität von Wirkung und Gegenwirkung, denn keine Kraft kann sich ohne eine Gegenkraft oder einen Widerstand entwickeln und daher sind bei jeder Kraftwirkung zwei Faktoren: Druck und Geschwindigkeit in Betracht zu ziehen, von denen der eine oder andere wohl unmessbar klein werden, aber, auf Grund des dynamischen Prinzips, sich niemals absolut nullieren kann, wie später bewiesen werden wird. Auf Grund dieser Anschauungsweise werden auch die Unterschiede der potentiellen und kinetischen Energie hinfällig, denn die als potentielle Energie gekennzeichnete relativ statische Druckkraft beruht nach der kinetischen Molekulartheorie und nach den Begriffen der mechanischen Wärmetheorie ebenso gut auf kinetischer Energie, das heisst Bewegkraft, wie die als kinetische Energie bezeichnete Bewegkraft. Beide Vorstellungs- oder Erscheinungsarten der Kraftwirkung sind aber deshalb als relativ statische Zustände zu bezeichnen, weil nach aussen hin keine Änderung des Kraftzustandes angenommen wird

oder sich bemerkbar macht, obwohl im Grunde genommen der Zustand auf einem dynamischen Vorgange, nämlich auf Schwingungen beruht, denn alle Erscheinungen begründen sich auf Arbeitsprozesse. So arbeitet das Licht auf unsere Sehnerven, der Schall auf unsere Gehörnerven, die Wärme auf die besonderen Gefühlsnerven. Von der Elektrizität ist ebenfalls der Schwingungsvorgang, die Wellenbewegung der Fortpflanzung durch den Raum nachgewiesen und in der Theorie des Magnetismus wird als Ursache der Erscheinung dieser Kraft molekulare Rotationsbewegung angenommen. Demnach ist wohl auch mit grösster Wahrscheinlichkeit vorauszusetzen, dass die Gravitation bezw. die Schwerkraft ihre Wirkungen durch Schwingungen vollzieht, wie ja auch aus den schwingenden Bewegungen der Nutationserscheinung am Fesselschen Rotationsapparate geschlossen werden kann. Der qualitative Zusammenhang aller Naturkräfte kann heutzutage überhaupt gar nicht mehr fraglich erscheinen, nur eingefleischte Empiriker vermögen denselben zu leugnen, weil ihnen die bereits thatsächlich vorhandenen Nachweise noch nicht genügend mit der gewohnheitsmässigen Anschauung der Dinge übereinstimmen und die logische Notwendigkeit dieses Zusammenhanges ihrem unlogischen Denken noch nicht klar geworden ist.

Die Kraft ist immer körperlich, das ist dreidimensional, ein Volumen einschliessend und somit als eine Arbeitsgrösse zu denken. Auch die sogenannte elektromotorische Kraft wird in dieser Weise durch die Dimensionsformel $L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} = (L^3 M T^{-4})^{\frac{1}{2}}$ definiert. Lässt man aber Masse und Zeit als blosse numerisehe Faktoren bezw. Divisoren der Kraft gelten, so reduziert sich die Kraft auf eine blosse dreidimensionale Raumgrösse $L^3$. Wird nun aber eine der drei Dimensionen auf die absolute Einheit $L^0 = 1$ beschränkt, indem man nur die in einer Äquipotential- oder Niveaufläche befindlichen Kraftelemente zur Geltung kommen lassen will, so erhält man den Begriff der Flächenkraft oder Kraftfläche definiert durch $L^2$. In der That wird man bei der Beobachtung eines Naturvorganges fast stets nur äquipotentielle, das heisst einer Niveaufläche entstammende Kraftelemente betrachten, wie z. B. bei der Schwerkraft, wo die Beschleunigung $g$ als eine konstante Grösse angesehen wird, obschon sich dieselbe mit der Entfernung vom Erdzentrum ändert. Wird für gewisse Kraftwirkungen die absolute Flächeneinheit berücksichtigt, das heisst, dividiert man die Volumenkraft $L^3$ durch die Flächenkraft, so erhält man die Linearkraft oder Kraftlinie, deren Symbol $L$ ist. Aber auch diese Kraftlinie ist körperlich zu denken und deshalb hat man in der Elektrostatik den Begriff der Kraftröhre eingeführt.

10. Alle in der Natur wirksamen Kräfte sind als Zentralkräfte anzusehen, das heisst als Kräfte, welche von einem Punkte ausgehend gedacht sind und deren Wirkungen sich bei ungestörter Entfaltung auf konzentrischen Kugelflächen gleichmässig nach dem Prinzip der Krafterhaltung in der Weise verteilen, dass die Summen der in den einzelnen Kraftflächen parallel geschalteten äquipotentiellen Kraftelemente einander gleich sind. Aus dieser Art der Kraftverteilung folgt, dass die absoluten Einheiten der Flächenkräfte der verschiedenen Kraftflächen sich umgekehrt wie die zweiten Potenzen der Entfernungen vom Kraftzentrum verhalten.

Der auf diese Weise bestimmte Kraftbegriff hat daher die Bedeutung einer Funktion, nach welcher sich die beschleunigende Wirkung mit der Grösse der Massen und mit der Entfernung der Massenmittelpunkte ändert. Das allgemeinste Gesetz dieser Art ist das Newtonsche Gravitationsgesetz, nach welchem die beschleunigende Wirkung dem Produkt der Massen direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional gesetzt wird. Das Quadrat dieser Entfernung ist aber proportional der Kugelfläche, von welcher diese Entfernung den Radius bildet und in welcher die Wirkung der Zentralkraft sich verteilt. Die Summe der Kraftwirkungen ist daher in jeder der konzentrischen kugelförmigen Niveau- oder Potentialflächen, in denen die Zentralkraft im Raume sich ausbreitet, von gleicher Grösse, aber die Kraftverteilung in der absoluten Flächeneinheit steht natürlich im umgekehrten Verhältnis zur Flächengrösse, wie im Produkt der Arbeit der Faktor der Masse im umgekehrten Verhältnisse zum Faktor des Weges oder der Kraftstrecke steht. In ähnlicher Weise vollzieht sich die räumliche Kraftverteilung bei allen Naturvorgängen, wie Schall, Wärme, Licht, Elektrizität und Magnetismus, insoweit die statische Wirkungsweise der Kräfte in Betracht gezogen wird, wobei der Gleichgewichtszustand zwischen Wirkung und Gegenwirkung vorhanden ist. Anders ist es, wo die Kraftwirkungen durch schon vorhandene Bewegungen beeinflusst werden. Demnach hat das Newtonsche Gravitationsgesetz in zwei Erscheinungsgebieten keine Geltung erlangt, nämlich erstens bei solchen Fernewirkungen, deren materielles Substrat in einer sehr raschen Bewegung begriffen zu sein scheint, wie dies z. B. bei elektrischen Strömungen der Fall ist, und zweitens bei den molekularen Entfernungen benachbarter Körperelemente, wobei wahrscheinlich Schwingungen zur Geltung kommen*).

---

*) W. Wundt, „Methodenlehre", S. 367.

11. Eine Erklärung für diese Erscheinungsformen der Kraftwirkungsweise ist durch das sogenannte Dopplersche Prinzip gegeben, welches hier in Kürze zu besprechen ist.

Doppler stellte im Jahre 1842 das Prinzip auf, dass man einen Ton höher hört, als er an und für sich durch seine Schwingungszahl ist, wenn Tonquelle und Ohr sich einander nähern, dass aber dagegen der Ton tiefer gehört wird, als er ist, wenn Tonquelle und Ohr sich von einander entfernen.

Eine analoge Erscheinung ist von dem Astronomen Huggins bei Anwendung der Spektroskopie zur Untersuchung des Sternenlichtes entdeckt worden, wodurch es ermöglicht wird, die Bewegung von Sternen in der Richtung der Sehlinie zu messen. Es ist nämlich von dem genannten Forscher bemerkt worden, dass z. B. die Linie des Wasserstoffs, welche durch das Licht eines Sternes im Spektroskop sichtbar wird, eine geringe Verschiebung nach der einen oder anderen Seite erleidet, jenachdem der Stern sich der Erde nähert oder sich von der Erde entfernt, indem dadurch die Schwingungszahl des Lichts, welche gegen die betreffende Stelle des Spektrums wirkt, sich vermehrt oder vermindert. Die Theorie dieser Untersuchungsmethode ist durch Beobachtungen der Sonne bestätigt worden. Da die östliche Seite der Sonne in Folge der Erdrotation sich der Erde etwas nähert, während die westliche Seite sich etwas von der Erde entfernt, so wird ein entsprechender Unterschied in den Spektren der beiden Sonnenseiten bemerkbar und die Rechnung hat gezeigt, dass diese Änderung einer Geschwindigkeit entspricht, welche mit der Rotationsgeschwindigkeit übereinstimmt.

Bezüglich der Schwerkraftswirkung, sowie der elektrischen und magnetischen Wirkung gilt dasselbe Gesetz, sobald andere Geschwindigkeiten, das heisst andere Kräfte mit in das Spiel eintreten.

Was insbesondere die Theorie der elektrischen Induktion anbelangt, so ist diese von Neumann auf das Lenzsche Gesetz und auf die von W. Weber erfahrungsmässig festgestellte Thatsache begründet worden, dass die Induktion der Geschwindigkeit direkt proportional ist, mit welcher sich der induzierende Draht der Induktionsspule nähert.

Bezüglich der Schwerkraftswirkung ist aber die Induktion um so schwächer, mit je grösserer Geschwindigkeit ein Massenelement sich vertikal aufwärts bewegt, denn bei einer Wurfgeschwindigkeit von etwa 11300 Meter würde das in dieser Richtung bewegte Massenelement überhaupt der Schwerkraftswirkung entzogen werden und nicht wieder zur Erde zurückkehren, so dass kein entgegengesetzter Induktionsstrom zustande kommt, luftleeren Raum natürlich vorausgesetzt. Bei abwärts

gehender Wurfgeschwindigkeit wird dagegen das Schwerkraftsfeld von der der Schwerkraftsentwickelung vorauseilenden Masse um so stärker induziert, denn die Schwerkraft muss dabei in der Zeiteinheit ihre Beschleunigung in einer um so längeren Kraftstrecke entwickeln, je grösser die Anfangsgeschwindigkeit des ihr vorauseilenden Massenelementes ist oder mit welcher das Massenelement sich dem Erdmittelpunkte nähert. Je grössere Geschwindigkeit die Schwerkraft entwickelt, desto geringer ist ihr Druck d. h. ihre Beschleunigung. Es gilt also das sogenannte Dopplersche Prinzip bezüglich der Schwere in analoger Weise wie für die elektrische Wirkung.

12. Mit Bezug auf die Erscheinungen, für welche das sogenannte Dopplersche Prinzip Geltung hat, fand man sich veranlasst, das Newtonsche Gravitationsgesetz zu modifizieren, um ausser der Wirkung, welche durch die Massen und ihre Lagendifferenz hervorgerufen wird, auch noch den ausserdem in das Spiel eintretenden Kräften Rechnung zu tragen. Besondere Bedeutung ist in dieser Beziehung dem von W. Weber aufgestellten sogenannten elektrodynamischen Grundgesetze beigemessen worden. In der von Weber zum Ausdruck dieses Gesetzes auf empirischem Wege aufgestellten Formel wird neben der Entfernung $r$ sowohl die Geschwindigkeit $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ als auch die Geschwindigkeitsänderung $\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)$ berücksichtigt, so dass dieses Gesetz seinen Ausdruck findet in der Formel

$$\frac{m\,m'}{r^2}\left(1 - \alpha\left[\frac{dr}{dt}\right]^2 + \beta\,\frac{d^2r}{dt^2}\right). \qquad (1)$$

Werden die beiden letzten Glieder dieser Formel einander gleich gesetzt, so nullieren sie sich und das gewöhnliche Gesetz der Fernewirkung kommt zum Vorschein, welches in der Coulombschen Formel bekanntlich auch für die elektrischen und magnetischen Wirkungen zur Geltung kommt. Mit Bezug hierauf hat man diesem empirischen Ausdruck für die Formel den Wert eines allgemeinen Naturgesetzes beigelegt, worin das Newtonsche Gravitationsgesetz als Spezialfall enthalten sein soll. Die willkürlich empirische Formulierung dieses Gesetzes lässt jedoch dasselbe nicht als ein fundamentales Naturgesetz zur Geltung kommen.

Auch die von bedeutenden Forschern angestellten Versuche, für die dem Newtonschen Gesetze sich entziehenden Molekularwirkungen ein besonderes Gesetz zu formulieren, haben keinen Erfolg gehabt, und die von der durch J. R. Meyer 1842 aufgestellten mechanischen Wärmetheorie hervorgerufenen rationelleren Vorstellungen vom Wesen der Kräfte haben derartigen Versuchen den Boden entzogen. Indem

die mechanische Wärmetheorie die Äusserungen der sogenannten Molekularkräfte als Wirkungen auffassen lehrte, die aus der Bewegung der Elemente des Natursubstrats resultieren, hat man sich mit Bezug auf dieses Gebiet wiederum der Galileischen Auffassung der Kraft genähert, indem man die Wirkungen auf die durch den direkten Stoss der Teilchen verursachte Beschleunigung zurückführte*).

Galileis grosses Verdienst besteht in der Begründung einer naturgemässen unanfechtbaren Vorstellung über die Erzeugung der Geschwindigkeiten als das Wesen der Kraftwirkung auf frei bewegliche Körper. Diese Vorstellungsweise ist dann auch von Lagrange und Hamilton, den bedeutendsten Förderern der wissenschaftlichen Mechanik, die von keinem der modernen Forscher übertroffen worden sind, angenommen worden. Jede Geschwindigkeit, mit der sich eine Masse bewegt, gilt bei Galilei als eine solche, die entweder durch Summation elementarer Geschwindigkeiten nachweisbar entstanden ist, oder die man sich wenigstens so entstanden denken kann. Hieraus folgt, dass jede bestimmte Geschwindigkeit sich auch wiederum in ihre Elemente auflösen kann. Lagrange hebt die Genialität ganz besonders hervor, mit welcher Galilei die Naturvorgänge klargelegt hat. Er stellt in dieser Beziehung den astronomischen Entdeckungen die dynamischen Theorien gegenüber, indem er sagt: „Die Entdeckungen der Jupitertrabanten, der Venusphasen, der Sonnenflecke u. s. w. erforderten nur Teleskope und Fleiss; aber es bedurfte eines ausserordentlichen Geistes (génie extraordinaire), um die Gesetze der Natur in Erscheinungen zu entwirren, die man stets vor Augen gehabt hatte, deren Erklärung aber nichtsdestoweniger den Nachforschungen der Philosophen immer entgangen war“.

13. Als im Jahre 1836 der italienische Forscher Mossotti in Turin seine Schrift „Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps“ veröffentlichte, worin der Nachweis geführt wurde, dass Gravitation, Aggregation, elektrische Kraft und elektrochemische Wirkung einen gemeinsamen Ursprung haben und im qualitativen Zusammenhange stehen, wurde diese Idee von den bedeutendsten Physikern der damaligen Zeit, insbesondere aber von Michael Faraday, John Herschel und Wilhelm Weber, mit dem lebhaftesten Interesse aufgenommen. In seinem klassischen Werke „Experimental Researches“ hat Faraday wiederholt ausdrücklich hervorgehoben, dass nach seiner festen Überzeugung, und trotz der von ihm in dieser Beziehung erhaltenen negativen Versuchsresultate, Elektrizität und Schwerkraft

*) Man vergl. W. Wundt, „Methodenlehre“. 1883. S. 368 u. f.

eine und dieselbe Ursache haben und im engsten Zusammenhange stehen. Auch der berühmte Astrophysiker Friedrich Zöllner hat den physischen Zusammenhang der durch formale Übereinstimmung ihrer Gesetze verbundenen elektrischen und gravitierenden Kraftwirkungen nachdrücklich hervorgehoben. Der in England anerkannte Nachfolger Maxwells, der geistreiche Analytiker Heavyside, dessen elektromagnetische Theorie von urteilsfähiger Seite als eine aussergewöhnliche, höchst geniale Leistung anerkannt worden ist, spricht sich darüber in einer Abhandlung betitelt „A gravitational and electromagnetic analogy"*) in folgender Weise aus: „Die Frage, ob der Äther die Ursache der Gravitation sei, muss unbedingt ins Auge gefasst und früher oder später gelöst werden".

14. In der Entwickelung der Theorie des Oszillations- oder Agitationszentrums ging Huyghens in seinem Werke über die Pendeluhr von der folgenden Voraussetzung aus: „Wenn sich beliebige Gewichte in Folge der Schwerkraftswirkung in Bewegung setzen, so kann deren gemeinsamer Schwerpunkt bei dieser Bewegung in irgend welcher Kurve die Höhe, in welcher er sich bei Beginn der Bewegung befand, nicht übersteigen". Diese Voraussetzung wird als ein selbstverständlicher Grundsatz hingestellt, dabei aber auf die Thatsache hingewiesen, dass die Schwere nicht aufwärts wirke, woraus Huyghens alsdann folgert, dass ein Perpetuum mobile unmöglich sei. Auf Grund dieser Voraussetzung löste Huyghens die Aufgabe der Bestimmung des Schwingungsmittelpunktes und dessen Abstandes von der Drehachse. Der Satz wird dann so formuliert, dass der Abstand des Schwingungsmittelpunktes von der Schwingungsachse dadurch bestimmt werde, dass man die Summe der Produkte der Massen mit den zweiten Potenzen der Geschwindigkeiten durch das Produkt der Gesamtmasse und des Abstandes ihres Schwerpunktes von der Achse dividiert. Sind die Geschwindigkeiten der Einzelmassen einander gleich, so erhält man die bekannte Formel der gleichförmigen Bewegung in einer Kreisbahn

$$\frac{v^2}{r} = p \text{ oder } v^2 = pr, \qquad (2)$$

worin $p$ den Abstand des Schwingungsmittelpunktes von der Schwingungsachse bezeichnet. Hieraus folgt, dass dieser Abstand des Schwingungspunktes vom Drehungspunkte, der in anderer Ausdrucksweise durch den Quotienten aus dem Trägheitsmoment des Massensystems und dessen statischem Moment bestimmt wird, die Bedeutung einer Kraftstrecke oder kurzweg einer Kraft hat, denn sein nach obiger Gleichung

*) The Electrician, 4. August 1893, p. 359.

bestimmter Wert fällt mit dem numerischen Werte der Zentrifugalkraft zusammen.

Nimmt man nun an, dass jede wirksame Kraft aus der Summe von Wirkung und Gegenwirkung besteht, so ist die halbe Kraft oder die lebendige Kraft als das Maximum der frei sich entfaltenden Kraftbethätigung anzusehen, indem mit Bezug auf die Gesamtkraft oder das Potential die Gleichung besteht

$$v^2 = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2}.$$

Die lebendige Kraft ist aber auch eine durch das Produkt aus Wirkung und Gegenwirkung gegebene Arbeitsgrösse, wobei die Wirkung als Druck, die Gegenwirkung oder der Widerstand als Geschwindigkeit aufgefasst werden kann. Der Druck entspricht dann der Kraft und die Geschwindigkeit dem in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg oder der Einheit der Kraftstrecke, die somit als Gegenkraft zur Geltung kommt. Sind die beiden Faktoren der Arbeit mit Bezug auf das Maximum der Arbeitsgrösse einander gleich und bezeichnet man dieselben mit $v$, so gilt demnach die Gleichung

$$\frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = v^2.$$

Es gilt nun aber die Gleichung

$$\frac{v^2}{2} = v^2 - \frac{v^2}{2} = q\,h,$$

wo $q$ die Kraft und $h$ die Kraftstrecke bezeichnen. Setzt man $2\,q = p$ und $h = r$, so erhält man die für die Kreisbewegung geltende Gleichung

$$v^2 = p\,r,$$

welche von Huyghens aus der Galileischen Fallkraftformel entwickelt wurde.

15. Die Mechanik beruhte anfangs nur auf statischen Untersuchungen, wobei nur die Schwerkraft, als eine selbstverständlich erachtete Kraftform aller Körper, zu den rein geometrischen Eigenschaften derselben hinzugedacht wurde. In dieser Weise wurde die Mechanik einseitig als Statik von Archimedes behandelt. Erst durch Galilei wurde die Kraft zur lebendigen Kraft, indem er als Vorbild der Kraftwirkung die Äusserung der Muskelkraft in Betracht zog, deren pulsatorisch wirksamen Antriebe sich in der vollen Wirkung oder in der Gesamtwirkung dieser auf einen Körper, das ist auf eine Kapazität oder ein Kraftaufsammlungsvermögen ausgeübten Kraft summieren oder akkumulieren. Nach diesem Gedankengang zerlegte Galilei die Wirkung einer Kraft in eine unendliche Reihe von allmählich

mit Zunahme der Geschwindigkeit abnehmenden Impulsen, die sich wiederum durch Übertragung auf einen anderen Körper zur vollen Kraft summieren. Die Wirkungsweise einer Kraft wird dadurch in Analogie mit einer oszillatorisch sich vollziehenden elektrischen Entladung gestellt.

Schon frühzeitig war die Thatsache erkannt worden, dass mit der Änderung der Kraftrichtung auch eine Änderung der Kraftgrösse verbunden ist. Schon vor Galilei war das bei freien Kraftwirkungen auftretende umgekehrte Verhältnis der durch den Hebel, die Schiefebene und andere mechanische Hilfsmittel der Kraftübertragung bestimmten Geschwindigkeiten der Bewegung allgemein geläufig, von Galilei wurde aber dieses späterhin als das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten bezeichnete Prinzip bei jeder Gelegenheit, die ihm seine Forschungen darboten, benutzt, und der ganze Gedankengang bei der Beurteilung der gegenseitigen Kräftebeziehungen begründete sich bei Galilei auf die Anerkennung dieses Prinzips, das mit seiner Auffassung der Kraftwirkung als eines Moments oder Antriebes auf das Innigste verschmolzen war. Am einfachsten gestaltet sich das virtuelle Prinzip am Hebel und Galilei versuchte die Thatsache des Gleichgewichts am gleicharmigen, beiderseits mit gleichen Gewichten belasteten Hebels durch die Hindeutung auf die bei unendlich kleinen Bewegungen eintretenden gleichmässigen Schwingungen begreiflich zu machen. Die hierbei auftretenden sogenannten virtuellen oder möglichen Kraftmomente sind aber in der That aktuelle Kraftmomente, denn wenn dieselben auch als unmessbar klein angenommen werden, so müssen sie doch mit Bezug auf ihre gedachten Wirkungen auch wirklich vorhanden sein. Es liegt darin die Anerkennung des Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung und daher auch die Anerkennung des Prinzips der Erhaltung der Kraft. Galilei gab diesem Prinzip die folgende Fassung: „Gleiche absolute mit gleicher Geschwindigkeit bewegte Gewichte entwickeln gleiche Kräfte und Momente in ihrer Wirkung“. Hieran schliesst sich alsdann das zweite Prinzip an, welches darin besteht, dass bei ungleichen Geschwindigkeiten deren verhältnismässige Grösse für das Verhältnis der Kräfte massgebend ist. Selbstverständlich ist dieses Prinzip der sogenannten virtuellen Momente oder Geschwindigkeiten, das aber wohl besser als das Prinzip der aktuellen oder wirksamen Momente oder der wirksamen Geschwindigkeiten zu bezeichnen wäre, auch für mehr als zwei auf einen Punkt einwirkende Kräfte gültig. Aus diesem Prinzip hat sich das Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte nach dem Parallelogrammgesetz entwickelt, welches von Galilei für zwei rechtwinklig

gegeneinander wirksame Kräfte mit Bezug auf die parabolische Bahn eines geworfenen Körpers Anwendung fand.

Von grosser Bedeutung für die Entwickelung des Prinzips der Zusammensetzung der Kräfte ist eine von Roberval im Jahre 1668 verfasste Abhandlung, betitelt „Bemerkung über die Zusammensetzung der Bewegungen und über das Mittel die Tangenten an krumme Linien zu finden (Observations sur la composition des mouvements etc.“). Der Verfasser geht dabei von dem Grundsatze aus, dass die Tangente in einem Punkte einer Kurve die momentane Bewegungsrichtung darstelle, welcher ein in dieser Kurve laufender Punkt unterliegt. Ferner wird angenommen, dass die beiden Strecken, welche die Seitenbewegungen des bewegten Punktes darstellen, sich gleichzeitig bewegen und der Ort des bewegten Punktes als der fortschreitende Durchschnittspunkt dieser Linien sich darstellt. Hierdurch soll die doppelte Bewegung des Punktes verdeutlicht werden, jedoch wird dadurch der Vorgang unklar. Nach dem bereits von Galilei anerkannten und von Huyghens formulierten Unabhängigkeitsprinzip, wonach jede der in einem System wirksamen Kräfte immer derartig wirksam zu denken ist, als wenn sie allein vorhanden wäre, können die Kräfte nur pulsatorisch in rascher Aufeinanderfolge wirksam sein, wie dies Galilei nach dem Begriff der Momente voraussetzt. Offenbar kann die absolute Bewegung eines freien Punktes immer nur nach einer Richtung hin zum Ausdruck kommen und wenn mehrere Kräfte auf den Punkt einwirken, so wird deren Wirkungsweise sich derartig regeln, dass mit dem kleinsten Kraftaufwande die grösste Wirkung erreicht wird, dies kann aber nur dadurch stattfinden, dass die verschiedenen Kräfte periodisch zu freier Wirkung gelangen. Von ganz besonderem Interesse ist eine die vorhergehende ergänzende kurze Abhandlung Robervals betitelt: „Projet d'un livre de mécanique traitant des mouvements composés“. Es wird darin das gesamte Naturwirken auf die Zusammensetzung von Bewegungen oder Kräften zurückgeführt, wobei alle Kraftwirkungen, einschliesslich der animalischen, als das Ergebnis von Zusammensetzungen angesehen werden. Hierin liegt der Begriff der Dualität der Kräfte, denn jede Kraftentwickelung beruht auf einem Gegensatz von positiv und negativ, auf einer Potentialdifferenz, auf Wirkung und Gegenwirkung; jede Kraftäusserung kann sich nur an einem Widerstande, auf Grund des Gegensatzes von Selbstinduktion und Kapazität, vollziehen.

16. Das sogenannte virtuelle Prinzip ist unter den ältesten Grundprinzipien der Mechanik das allgemeinste und das am meisten philosophische, wie Dühring in seiner kritischen Geschichte der

allgemeinen Prinzipien der Mechanik*) besonders hervorhebt. Die weitere Entwickelung dieses Prinzips hat zu allgemeinen Formulierungen von grosser Tragweite geführt, indem dasselbe als das Verbindungsglied zwischen Statik und Dynamik gedient hat. Newton erläutert dieses Prinzip durch die Analogie der Kräfteverhältnisse im Stoss und kommt dabei auf den Grundsatz der Gleichheit von Aktion und Reaktion zurück. Zerlegt man nämlich sowohl die Aktion als auch die Reaktion in die Faktoren der Masse oder Kraft und der Geschwindigkeit, so ergiebt sich, dass die Gleichheit entgegengesetzt gerichteter Bestrebungen ein umgekehrtes Verhältnis zwischen den Massen und Geschwindigkeiten erfordert. Newton drückt diesen Satz folgendermassen aus: Wie bei dem Zusammentreffen im Stoss die Körper gleiche Wirkungen hervorbringen, wenn ihre Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die vires insitae, das heisst die angeborenen Kräfte oder Trägheitskräfte verhalten, so halten bei der Bewegung der Maschinen diejenigen Wirkungen einander das Gleichgewicht, deren Geschwindigkeiten den Kräften, welche diese Geschwindigkeiten erzeugen, umgekehrt proportional sind. Das virtuelle Prinzip findet somit seinen Ausdruck in dem Satze, dass gleiche Kräfte mit einander im Gleichgewicht sind und dass daher durch die Gleichheit der virtuellen (eigentlich aber der aktuellen) Momente die Gleichheit der Kräfte nachgewiesen wird. Mit anderen Worten: Lebendige Kräfte sind einander in ihren Wirkungen gleich, wenn ihre Differentialquotienten $d\frac{\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dv} = v$ einander gleich sind, das heisst, wenn sie synchron schwingen und sich somit durch den kinetischen Druck im dynamischen Gleichgewichtszustande befinden; dies ist zum Beispiel bei einem elektrisch geladenen isolierten Körper im Dielektrikum der Fall, welcher Zustand des elektrostatischen oder kinetischen Druckes in der bekannten Gleichung

$$f = 2\pi\sigma$$

seinen Ausdruck findet, welche Formel bekanntlich aus der allgemeineren Formel

$$f + f' = 4\pi\sigma$$

für $f = f'$ abgeleitet ist. Weiterhin kommen wir darauf zurück, um diese Anschauungsweise vollständig zu rechtfertigen.

Newton betrachtete die Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte als die Grundlage der ganzen Mechanik. Er verknüpfte damit

*) 2. Aufl. S. 100.

das schon von Galilei aufgestellte Gesetz, dass die Veränderung einer Bewegung proportional der bewegenden Kraft ist und in der Wirkungsrichtung dieser Kraft erfolgt. Auf diese Weise erscheint das Zusammensetzungsprinzip als eine Kombination des Beharrungszustandes der bewegten Masse und der hinzutretenden Abänderung des Bewegungszustandes, wobei sich beide Kräfte derartig vereinigen, dass durch keine von beiden Kräften die Wirkungsweise der anderen Kraft beeinflusst wird. Es wird dadurch die Masse selbst mit einer Kraft identifiziert und zwar mit der von Newton bezeichneten vis inertiae oder Trägheitskraft und dabei wird dem Unabhängigkeitsprinzip in dem bereits vorher angedeuteten Sinne Rechnung getragen.

In seinem Hauptwerke Philosophiae naturalis principia mathematica stellte überhaupt Newton nur drei einfache Bewegungsgesetze oder Bewegungsaxiome auf, nämlich erstens das Gesetz der Beharrung des Bewegungszustandes; zweitens das Gesetz der Veränderung des Bewegungszustandes im Verhältnis zur Bewegkraft oder motorischen Kraft (vis motrix); drittens das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Durch die beiden ersten Axiome (Beharrung und Veränderung im Verhältnis zur Bewegkraft), sowie die daraus gezogenen Folgerungen bezüglich der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte hat Galilei festgestellt, dass sich die Fall- oder Kraftstrecken wie die zweiten Potenzen der entsprechenden Zeitverläufe verhalten und dass die Wurfbewegung in einer Parabel sich vollzieht. Das dritte Axiom wurde von Newton zur Darlegung der Gesetze des Stosses benutzt, wobei die zwischen zwei Körpern stattfindende Wirkung als Widerstand in Frage kommt, so dass man dieses dritte Newtonsche Gesetz auch so ausdrücken kann: Jede Wirkung eines Wirkungsmittels oder die Grösse der von diesem Wirkungsmittel verrichteten Arbeit oder ausgeübten Kraft ist gleich der Gegenwirkung des Widerstandes.

17. Mit Bezug auf die Methoden, deren sich die ersten Begründer der heutigen Mechanik, Galilei, Huyghens und Newton, zur Aufstellung der Hauptgrundsätze dieser Wissenschaft bedienten, ist es von Interesse zu bemerken, dass Galilei, der als der eigentliche Bahnbrecher der neueren Anschauungsweise mechanischer Kräftebeziehungen zu betrachten ist, von der natürlichen Anschauung der Dinge ausging und dadurch zur Vorstellung der gleichförmig beschleunigten Bewegung gelangte, für welche er alsdann den mathematischen Ausdruck gewann. Die von ihm aufgestellten Formeln prüfte er schliesslich auf ihre Richtigkeit durch geeignete Versuche. Von Lagrange wird darauf hingewiesen, dass das Genie Galileis weniger in der glücklichen Beobachtung als in der ausserordentlichen Befähigung zur Abstraktion

bestand, wodurch derselbe die in mehr oder minder verwickelter Form zur Anschauung gelangenden Naturvorgänge zu zergliedern und zu entwirren vermochte. In der Verfahrungsweise Galileis macht sich die spekulative Induktion in ausgezeichneter Weise geltend. Was den Niederländer Christian Huyghens anbelangt, so war in dessen Veranlagung das Talent zur mechanischen Praxis mit dem Genie in der subtilsten geometrischen Synthese in glücklichster Weise verbunden.

Die Bedeutung Newtons wird darin gefunden, dass er die Idee der universellen Gravitation aufstellte und darauf die Bewegung der Himmelskörper begründete. Hierzu war ihm das Material durch die von Kepler in genialer Weise festgestellten astronomischen Thatsachen, sowie durch die von Huyghens entwickelte Theorie der Zentralbewegung an die Hand gegeben worden. Der Gedanke an eine allgemeine Gravitation schwebte damals aber, wie dies bei derartigen Entdeckungen allgemeiner Naturgesetze wohl immer der Fall ist, gewissermassen in der Luft. E. Dühring weist in dieser Beziehung in seiner kritischen Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik*) auf den Italiener A. Borelli hin, der in seiner 1666 herausgegebenen Arbeit über die Jupiterstrabanten davon ausgeht, dass die Planeten und Trabanten sich mit dem von ihnen umkreisten Zentralkörper zu vereinigen suchen und dass die Kreisbewegung von dem Streben des kreisenden Körpers nach Entfernung vom Kraftzentrum verursacht werde. Die Möglichkeit der Kreisbewegung wird daher nach Borelli durch das Gleichgewicht zwischen jenen beiden Bestrebungen bedingt. Noch bestimmter als von Borelli war aber die Idee der allgemeinen Gravitation von einem Zeitgenossen und Landsmanne Newtons, dem Physiker Hooke, erfasst worden, der geradezu die eigentlichen mechanischen Verhältnisse ins Auge fasste und nach dieser Richtung hin sogar Versuche anstellte. Hooke entwickelte seine Gedanken in einer besonderen Schrift**), gelangte jedoch erst später zur Voraussetzung des Gesetzes der quadratischen Abnahme der Kraft im Verhältnis zur Wirkungs- oder Kraftstrecke. Hooke hatte die Bedeutung der mechanischen Gesetze mit Bezug auf die planetarischen Bewegungen vollständig erkannt und in die Notwendigkeit des Entstehens der elliptischen Bewegung eine klare Einsicht gewonnen. Auch sagte er voraus, dass derjenige, welcher genauer auf die Quantitätsverhältnisse eingehen würde, dazu gelangen müsste, die planetarischen Erscheinungen mit der grössten Genauigkeit bestimmen zu können. Newton selbst giebt an, dass das Gesetz der quadratischen Abnahme schon vor seiner

*) 2. Aufl. S. 180.
**) An attempt to prove the motion of the earth. London, 1674.

eigenen Aufstellung des Gravitationsgesetzes von Bouilland vorausgesetzt worden sei. Newton hatte daher nur noch die Einerleiheit der Gravitation und irdischen Schwerkraft, sowie die streng mathematischen Gründe der Entstehung elliptischer Bahnen nachzuweisen. Diese Aufgabe hat er in einer Weise gelöst, welche den Beweis für eine ausserordentliche Begabung abgiebt und sein Verdienst um die Förderung der mechanischen Grundprinzipien sicherstellt.

Diese drei ersten Begründer der modernen Mechanik, Galilei, Huyghens und Newton, sind zu den von ihnen gewonnenen Resultaten mit Anwendung sehr einfacher mathematischer Hilfsmittel und ohne Anwendung der Analysis gelangt. Sie haben eine Reihe von Sätzen in diese Wissenschaft eingeführt, von denen jeder die Bedeutung eines Prinzips besitzt. Hieran schliessen sich noch gewisse durch spekulative Betrachtungen gewonnene fundamentale Lehrsätze an, deren Inhalt aber erst mit der Zeit geklärt worden ist. Zuerst ist hier an den bei Descartes (Cartesius) auftauchenden Gedanken der Erhaltung der Bewegungsgrösse zu erinnern, der sich alsdann zum Prinzip der Erhaltung der Kraft oder, wie man auch sagt, zum Prinzip der Erhaltung der Energie entwickelte. Descartes hatte hierbei die Übertragung der lebendigen Kraft durch die Stosswirkung ins Auge gefasst, jedoch sind seine bezüglichen Betrachtungen sehr unklar, einseitig und zum Teil unrichtig.

Viel wichtiger ist das von Huyghens als eine selbstverständliche Voraussetzung eingeführte Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte, welches der Zeit wie der Bedeutung nach die erste Stelle unter den sogenannten Erhaltungsprinzipien einnimmt. Huyghens wurde auf dieses Prinzip durch die Untersuchung der Pendelbewegung geführt, indem er dabei auf den schon früher erwähnten Grundsatz kam, dass ein fallender Körper durch die erlangte Geschwindigkeit niemals zu einer grösseren Höhe sich erheben kann, als die vorher von ihm durchfallene Höhe oder durchlaufene Kraftstrecke ist. Betrachtet man aber die Steighöhe sowie die Fallhöhe als wirksame Kraftstrecken, so besagt der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft weiter nichts, als dass Wirkung und Gegenwirkung als Arbeitsgrössen einander gleich sind, und somit liegt darin schon das Prinzip der Erhaltung der Kraft.

18. Neben dem Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte wurde von Huyghens noch ein anderes wichtiges Prinzip in Betracht gezogen, nämlich das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunktes. Dieses Prinzip kam zuerst bei der Betrachtung der Stosswirkung zur Anerkennung. Auch Descartes nahm bei Aufstellung seines Satzes von der Erhaltung der Bewegungsgrösse hauptsächlich Rücksicht auf

den Stoss, wobei er zu dem Schluss gelangte, dass die absolute Bewegungsgrösse erhalten bleibt. Man hat diese Annahme als eine irrtümliche bezeichnet, indem man meint, dass nicht die absolute, sondern die algebraische Summe der Bewegungsgrösse sich erhalte. Wenn man aber davon ausgeht, dass Bewegung nur durch eine andere, vorausgegangene Bewegung hervorgerufen werden kann, und dass Kraft überhaupt mit Bewegung identisch ist, so muss man zugestehen, dass das Prinzip der Erhaltung der Bewegungsgrösse mit dem Prinzip der Erhaltung der Kraft identisch ist. Zu dem abfälligen Urteil über die von Descartes bei Aufstellung seines Prinzips der Bewegungsgrösse zum Ausdruck gebrachte, vielleicht an und für sich noch nicht genügend abgeklärte Idee ist man durch die einseitige Betrachtung der äusseren Wirkung des Stosses gelangt, indem man nur die ortändernde sichtbare Bewegung ins Auge fasste, aber nicht daran dachte, dass auch die von der Stosskraft einer Masse gegen eine andere Masse dieser letzteren induzierte und durch Schall-, Wärmeentwickelung u. s. w. sich kundgebende molekulare Wirkung auf Bewegung beruht.

Wenn ein Körper gegen einen anderen Körper drückt, kann man nach der oberflächlichen Beurteilung des Vorganges wohl sagen, dass die beiden im Druck wirksamen Kräfte sich gegenseitig aufheben und nullieren, dem Prinzip nach ist aber zu behaupten, dass die beiden Druckkräfte sich summieren, wie dies z. B. in der Formel für den elektrostatischen Druck gedacht ist, wo man die Wirkung gleich der Summe der beiden wirksamen Kräfte setzt und die Wirkung als Oberflächendichte oder Ladung bezeichnet. Es ist dabei die Summation von Wirkung und Gegenwirkung zwischen elektrisiertem Leiter und Kraftfeld in Betracht gezogen, wobei an die Wirkung zweier Flächenkräfte gedacht ist, sodass das Produkt, das ist die Gesamtwirkung als eine Grösse vierter Dimension durch $v^4$ symbolisiert wird.

19. Die rein geometrische Anschauung der Kraftentwickelungen in Raumstrecken hat zur einseitigen Anschauung geführt, dass Wirkung und Gegenwirkung in jedem Momente gleich sind. Wenn sich mit Rücksicht auf Schwingungen, worin doch alle Kraftbethätigung beruht, Wirkung und Gegenwirkung proportional zu den Winkelfunktionen von Sinus und Cosinus entwickeln, so sind im allgemeinen die Entwickelungen der Kraftstärken oder Intensitäten verschieden, nur wenn der Sinus eines Winkels gleich dessen Cosinus ist, das heisst, wenn die Schwingungsphase $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ (als kleinste lebendige Kraft) beträgt, ist eine momentane Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung mit Bezug auf die Kraftstärken vorhanden, sonst aber kann nur von einer

Gleichheit der in einer Schwingungsperiode als Wirkung und Gegenwirkung auftretenden Arbeitsgrössen oder der auf einander folgenden periodischen Kraftgrössen die Rede sein, wie bei der Betrachtung der Pendelschwingung noch eingehender zu erörtern ist*).

Wenn also die Geschwindigkeit auch als messbare räumliche Änderung verschwindet, wobei ja doch die Ortsänderung an sich mit der Kraftentfaltung gar nichts zu thun hat, sobald diese Kraftentfaltung eine gleichmässige und daher mit der statischen Druckwirkung identische ist, so ist diese Wirkung in der That doch vorhanden, indem sie sich in Schwingungen vollzieht, bei denen die Ortsänderung sich periodisch aufhebt und, wenn die Amplituden verschwindend klein sind, überhaupt nicht in Betracht kommt, weil sie sich der Beobachtung entzieht. Die Bewegung ist daher nicht mit Bezug auf Raumstrecken, sondern mit Bezug auf Kraftstrecken ins Auge zu fassen, so dass der zurückgelegte Weg selbst zur Kraft wird, mag dieser Weg messbar gross oder unmessbar klein, geradlinig oder eine Kurvenbahn sein. Der Druck ist dynamischer Natur und beruht auf der Kinetik der Kraftelemente. Keine Kraft kann im absoluten Nullpunkte verschwinden, so wenig als eine Kraft sich aus dem absoluten Nullpunkte entwickeln kann. Das dynamische Prinzip verlangt die Annahme eines unvertilgbaren, durch Reaktion stets bis zu einer gewissen Grenze entfaltbaren Kraftkeims.

Auf diesen Voraussetzungen beruht der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte oder, kürzer gefasst: der Satz von der Erhaltung der Kraft, welcher in rein mathematischer Formulierung lautet:

„Wenn ein System irgendwie verbundener Massen oder negativer Kräfte sich unter dem Einflusse gegebener (positiver) Kräfte bewegt, so ist die Summe der Produkte der Massen in die Geschwindigkeiten zu allen Zeitpunkten, in welchen die Massen dieselben relativen Lagen gegen einander einnehmen, das heisst, in welchen die Beziehung der Massen zu den Kraftstrecken im ganzen nicht geändert wird, die nämliche.“

Dieser Satz wurde von Huyghens (also etwa in der Mitte des 17. Jahrhunderts) auf der Annahme begründet, dass eine Kraft sich gleich bleibt, welche Voraussetzung dem Beharrungsgesetze zu Grunde liegt, und ferner auf der Annahme, dass keine Kraft aus Nichts entstehen kann, welcher Grundsatz dann in dem von Werner Siemens aufgestellten sogenannten elektrodynamischen Prinzip zum modifizierten Ausdruck kam. An und für sich ist aber das dynamische Prinzip ein schon von Galilei anerkanntes Naturgesetz.

*) Schwartze, „Die Lehre von der Elektrizität“, S. 106.

Wird nun das von Descartes aufgestellte Prinzip der Erhaltung der Bewegungsgrössen in diesem Sinne beurteilt, so muss man dasselbe als richtig anerkennen und als identisch mit dem Gesetze der Erhaltung der Kraft gelten lassen.

In dem angedeuteten Sinne suchte Leibniz dem Produkt aus der Masse in das Gewichtigkeitsquadrat eine metaphysische Bedeutung beizulegen, indem er als Gegensatz zu der bei dem Gleichgewichtszustande der Körper von ihm in Betracht gezogenen „toten Kraft“ das Produkt aus dem gehobenen Gewicht in dessen Erhebungshöhe als „lebendige Kraft“ bezeichnete. Er bezog sich dabei auf die aus dem Fallgesetz abgeleitete Formel $\frac{v^2}{2} = gh$*).

Man hat diese Definition der lebendigen Kraft bemängelt, indem man darauf hinwies, dass der Begriff des Arbeitseffektes, welcher unter dem Symbol der lebendigen Kraft zum Ausdruck komme, durch die Leibnizsche Definition nicht gedeckt werde, weil die Grösse nicht auf die Zeiteinheit bezogen sei. Diese Annahme hat aber keine Berechtigung, denn der Begriff der lebendigen Kraft bezieht sich nicht auf die Arbeitsstärke, sondern auf die Arbeitsgrösse, welche nach Meterkilogramm ohne Rücksicht auf den Zeitverlauf zu bemessen ist. Aus der Herleitung des Symbols der lebendigen Kraft geht hervor, dass der dafür formulierte Ausdruck eine zeitlose Grösse ist.

Schon oben wurde angedeutet, dass die Gesamtkraft eines Kraftsystems als die Summe aus Wirkung und Gegenwirkung, das heisst als eine „duale Grösse“ zu betrachten ist, wie später bestimmt nachgewiesen werden wird, wie aber auch schon logisch zu folgern ist, denn eine Kraft ist ohne einen dieselbe hervorrufenden Widerstand nicht denkbar. Es ist also anzunehmen, die Gesamtkraft oder das Potential eines Kraftsystems sei gegeben durch

$$v^2 = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2}$$

nach dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Die Kraft $v^2$, welche als eine latente Arbeitsgrösse zu gelten hat, ist zu definieren als ein Produkt aus Druck mal Geschwindigkeit, oder auch als ein Produkt aus Kraft mal Weg (Kraftstrecke) in dem auf S. 20 angedeuteten Sinne. Wir setzen also $v^2 = v_1 v_2$ und denken uns, dass die Kraft pulsiv in $n$ gleichen Intervallen zur Wirkung komme, wobei $n$ eine beliebig grosse Zahl sein mag. Dem Unabhängigkeitsprinzip nach müssen die beiden Kraftfaktoren in freier Wirkung

*) Schwartze, „Die Lehre von der Elektrizität“, S. 86.

unabhängig von einander sich in Hintereinanderschaltung bethätigen, so dass jeder dieser beiden Faktoren in $n$ Impulse zerlegt wird. Wir setzen daher $\frac{v_1}{n} = \mu_1$ und $\frac{v_2}{n} = \mu_2$ und denken uns, dass die Wirkung jedes Impulses dem arithmetischen Mittel aus dem Anfangs- und Endzustande der Kraftentfaltung entspricht.

Man erhält daher der Reihe nach die Kraftwirkungen:

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{2}, \qquad \frac{3 \mu_1 \mu_2}{2}, \qquad \frac{5 \mu_1 \mu_2}{2} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt, dass die wirksame Kraft bestimmt wird durch die Reihe:

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{2} (1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) = \frac{\mu_1 \mu_2}{2} n^2 = \frac{v^2}{2}.$$

Setzt man die im letzten Gliede vorhandene Grösse (— 1) als erstes Glied ein und denkt man sich den Übergang aus dem negativen Kraftgebiet in das positive Kraftgebiet durch den Nullpunkt, das ist durch die momentane Aufhebung der Kraftwirkung vermittelt, so erhält man:

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{2} (-[-1] + 0 + 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n) = \frac{\mu_1 \mu_2}{2} n^2 = \frac{v^2}{2}. \quad (1)$$

Es wird dadurch angedeutet, dass eine konstant wirksam gedachte Kraft, wie zum Beispiel die Schwerkraft, ihre Wirksamkeit mit einem bewegungslosen Antriebe oder virtuellen Moment vor Eintritt der ortsverändernden, das heisst der sichtbaren Bewegung beginnt. Ferner zeigt aber auch diese Form der Reihe, dass der Vorgang mit einer geraden Anzahl von $2n$ Impulsen, das heisst, mit einem Ausgleich zwischen Wirkung und Gegenwirkung abschliesst.

Setzt man nun voraus, dass der Zeitpunkt, wo man die in Bewegung sich äussernde Wirkung einer konstant gedachten Kraft der Messung unterwirft, der durchlaufene Weg oder die von der Kraftwirkung überwundene Kraftstrecke zugleich auch das erste Zeitintervall des Vorganges bestimmt, so dass die Zeiteinheit gewissermassen als spezifische Zeiteinheit des Vorganges betrachtet wird, so dient zur Bestimmung der Kraftwirkung die Reihe:

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{2} (-[-1] \pm 0 + 1) = \mu_1 \mu_2 = v^2, \qquad (2)$$

wobei $\mu_1 = \mu_2$ anzunehmen ist. Der Verlauf des Vorganges schliesst alsdann zwei Zeitintervalle ein und nach dem Galileischen Fallgesetze ist am Ende des zweiten Zeitintervalls die sogenannte Endgeschwindigkeit

oder die Bewegungsgrösse für die Masseneinheit gleich der zurückgelegten Kraftstrecke, denn für die Zeit $t = 2$ gelten alsdann die Formeln

$$s = \frac{g}{2}(2)^2 = 2g \text{ und } v = 2g.$$

Die spezifische Zeiteinheit des Vorganges, das ist der Zeitverlauf einer Schwingung wird, wie dies ja bei den bekannten Schwingungsgrössen des Lichtes und der Elektrizität der Fall ist, ausserordentlich klein sein und daher bedeutet in der Reihe (2) die durch das Produkt $\mu_1 \mu_2 = v^2$ dargestellte Kraft das elementare Kraftleistungsvermögen oder den Urimpuls der wirksamen Kraft, mit einem anderen Wort: das Urpotential. Es erscheint dann die momentane Kraftwirkung als das Produkt zweier freien oder neutralen, das heisst: zweier rechtwinklig gegen einander gerichteten gleich grossen Kräfte $\mu\sqrt{2}$. Diese Kräfte wirken mit der Schwingungsphase $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ gegen einander, so dass sie in ihrer Geschwindigkeitsentwickelung von einander unabhängig sind, wie dies bei der Kreisbewegung zwischen der Zentralkraft und der Tangentialkraft der Fall ist, indem stets das Maximum der einen Kraftentwickelung mit dem Minimum der anderen Kraftentwickelung zusammenfällt. Dieses Verhältnis der Kraftfaktoren tritt hervor, wenn man den Ausdruck der lebendigen Kraft nach der Geschwindigkeit, beziehungsweise nach dem Drucke differenziert. Man erhält alsdann:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v \, . \, dv.$$

In dem oben angenommenen Falle wird also die lebendige Kraft als elementare Kraftwirkung durch das Produkt

$$\frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{2} = \frac{v^2}{2}$$

bestimmt, wobei $\frac{\mu_1}{2}$ als halbe Bewegungsgrösse oder Kraftstrecke, das heisst: der Kraft gilt, wogegen $\mu_2$ als Symbol der am Ende des ersten Zeitintervalls oder Kraftstreckenintervalls tendierenden Geschwindigkeit, das heisst: als Symbol der in dem entsprechenden Zeitpunkte vorhandenen Bewegungsgrösse zu gelten hat. Diese Bewegungsgrösse fällt aber unter den Begriff des Drucks, denn nach Übereinkommen bezeichnet man für die Massengrösse $m$ das Massengewicht mit $mg$, so dass für die Masseneinheit $m^{\circ} = 1$ die Grösse $g$ das Massengewicht, das ist die dynamometrische Krafteinheit bezeichnet, wobei $g$ die Bedeutung der am Ende der (als willkürliche Zeiteinheit angenommenen) ersten Fallsekunde tendierenden Geschwindigkeit entspricht. Die Grösse $\frac{\mu_1}{2}$, als die Hälfte der momentan vorhandenen Bewegungsgrösse,

gilt für die gleichförmige Bewegung als arithmetischer Mittelwert aus der Summe des Anfangszustandes 0 und des Endzustandes $\mu_1$, indem man die Gleichförmigkeit der Bewegung durch die Formel $\frac{0 + \mu_1}{2}$ zum Ausdruck bringt. Diese Gleichförmigkeit der Bewegung entspricht aber dem wirklich zurückgelegten Weg, das heisst der als Gegenwirkung der Kraft auftretenden Kraftstrecke. Der Begriff der Kraftstrecke deckt sich nur mit dem Begriff der Geschwindigkeit, insofern man unter Geschwindigkeit stets den in der gewählten Zeiteinheit zurückgelegten Weg versteht, dieser Weg ist aber stets unter dem Begriff der Kraftstrecke aufzufassen.

Um aus der in der heutigen Mechanik vorhandenen Konfusion zwischen Weg, Geschwindigkeit, gleichförmiger und ungleichförmiger Geschwindigkeit und Beschleunigung herauszukommen, scheint es ratsam zu sein, den als Kraftstrecke zu betrachtenden Weg mit $s$, die Geschwindigkeit als den in der beliebig gewählten Zeiteinheit zurückgelegten Weg, bezw. die in der Zeiteinheit zurückgelegte Kraftstrecke mit $c$ und die am Ende einer unter der Wirkung einer konstant gedachten Kraft verflossenen beliebigen Zeiteinheit tendierende Geschwindigkeit oder auftretende Bewegungsgrösse für die Masseneinheit mit $v$ zu bezeichnen, wie dies ja eigentlich schon üblich ist, aber doch in diesem Sinne nicht streng durchgeführt wird.

Hiermit ist auf rationelle Weise ein Ausdruck für die Kraftbethätigung gewonnen; diese Kraftbethätigung ist proportional der zweiten Potenz der Kraftstrecke, wie dies nach dem Gravitationsgesetze bestimmt ist nach der Formel $\frac{m^2}{r^2}$, worin $r$ der Kraftstrecke zwischen den gegen einander wirkenden Massenmittelpunkten entspricht. Es ist aber $r^2$ der Fläche proportional, in welcher die Zentralkraft sich bethätigt, und daher wird durch den Quotienten $\frac{m^2}{r^2}$ die Reduktion der Kraft auf die Flächeneinheit ausgedrückt. Da nun die Kräfte bezw. Massen ihre freie Kraftwirkung in rechtwinkligen Richtungen gegen einander entfalten, so kann man annehmen, dass die wirksamen beiden Massen $m$ in den gegenüberliegenden Ecken eines Quadrats sich befinden, dessen Seiten der freien Kraftentfaltung Eins entsprechen, so dass die Kraftstrecke $r = \sqrt{2}$ und also die Kraft selbst gleich $\frac{m_2}{2}$ zu setzen ist, wodurch die lebendige, das heisst die wirksame Kraft repräsentiert wird.

Als Mass des Druckes gilt die in dem ersten Zeitintervall des Vorganges entwickelte Geschwindigkeit, welche gleich der doppelten

wirksamen Kraftstrecke $s$ ist, so dass zu setzen ist $\frac{v}{2} = s$. Demnach wird die Grösse der Kraftbethätigung für die Massengrösse $m$ ausgedrückt durch $(m v s)$, welcher Ausdruck schon im gleichen Sinne von Maupertuis*) aufgestellt worden ist.

Mit Bezug auf die vorhergehende Entwickelung des Begriffs der lebendigen Kraft ist noch Folgendes zu bemerken: Der numerische Faktor $n$, welcher der Zahl der wirksamen Kraftpulse entspricht, repräsentiert die Zeit, das heisst, dieser Faktor $n$ kann unter der Anschauungsform der Zeit betrachtet werden; derselbe kennzeichnet aber auch die Anzahl der räumlichen Abschnitte der in der Kraftstrecke aufeinanderfolgenden Kraftimpulse und es ist seine zweite Potenz umgekehrt proportional der Kraft $\frac{v\,d\,v}{2}$. Diese Kraft ist direkt proportional den bei jedem Impuls gegeneinander wirksamen Massen oder Kräften, deren Produkt mit $m^2$ oder $q^2$, wie dies üblich ist, bezeichnet werden kann, so dass man erhält

$$\frac{v\,d\,v}{2} = \frac{m^2}{n^2};$$

setzt man $n$ als Zahl der Kraftstreckeneinheiten gleich $r$, so erhält man den gewöhnlichen Ausdruck für die Gravitationskraft, die somit der kleinsten lebendigen Kraft $\frac{v^2}{4}$ oder auch der zweiten Potenz der Kraftstrecke entspricht. Somit wird die Raumstrecke selbst als eine Kraft gekennzeichnet, wie dies schon J. R. Mayer in der Idee erfasst hatte. Auch Lagrange hat wiederholt betont, dass die freie gegenseitige Einwirkung der Naturkräfte nach Massgabe von Distanzfunktionen stattfindet, so dass die Raumstrecke einer Kraftwirkung äquivalent erscheint. Bedenkt man nun, dass nach dem Gravitationsgesetze und dem damit übereinstimmenden Galileischen Fallgesetze die im Verlauf der beiden ersten (beliebig gewählten) Zeiteinheiten durchlaufene, das heisst zur Wirkung gelangte Kraftstrecke $j/_2\ (2)^2 = 2\,j$ gleich der am Ende der zweiten Zeiteinheit tendierenden Geschwindigkeit ist, so bedeutet der Ausdruck $\frac{v\,d\,v}{2}$ weiter nichts, als die auf die erste Zeiteinheit reduzierte Kraft. Hierbei ist der ganze Vorgang in zwei Perioden, in die variable Periode der Kraftentfaltung oder Kraftentwickelung gegen den Widerstand und in die stationäre Periode des Kraftbestandes, die nicht mehr vom Zeitverlaufe abhängig ist, weil eben der stationäre oder unveränderliche Bestand eines Dinges keinen Anlass zur Vergleichung mit dem Zeitverlaufe giebt. Dies ist nur bei der variablen Periode der Fall, wo Intensitäten in Betracht kommen,

*) Histoire de l'académie de Berlin. 1746.

welche dem Zeitverlaufe der Kraftwirkung umgekehrt proportional sind. Die Grösse $\frac{(dv)^2}{4}$ ist aber als eine Intensität zu betrachten, indem dadurch die Stärke des Kraftimpulses ausgedrückt werden soll, wobei gesetzt werden kann $\frac{dv}{\sqrt{2}}$. Der Faktor $\frac{dv}{\sqrt{2}} = q$, das ist $dv = q\sqrt{2}$ ergiebt aber das Verhältnis der Kraftentwickelung unter konstantem Druck zur Kraftentwickelung unter konstantem Volumen, welches mit Bezug auf Wärme bereits anerkannt ist, indem man das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zur spezifischen Wärme bei konstantem Volumen in seinem experimentell bestimmten Mittelwerte zu $1._{47}$ das ist zu $\sqrt{2}$ bestimmt hat. Hieraus ergiebt sich, dass die Kraftwirkung bei konstantem Druck oder die konstante Kraft als die Resultante von zwei gleich grossen rechtwinklig sich zusammensetzenden Kräften angesehen werden muss. Ferner ergiebt sich aber auch daraus, dass der Ausdruck der lebendigen Kraft, der ja nach der Anschauungsweise dem Minimum oder dem Maximum der Kraftwirkung entspricht und durch $\left(\frac{dv}{\sqrt{2}}\right)^2 n^2 = \frac{v^2}{4}$ gegeben ist, seinen Dimensionen nach einer zeitlosen Grösse $\frac{L\,T^2}{T^2} = L^2$ entspricht. In der Elektrizitätslehre bezeichnet man aber mit dem Produkt aus der sogenannten elektrostatischen Kapazität $L$ und der sogenannten elektromagnetischen Induktion $L$, das ist durch $L^2$ die gegenseitige Induktion, so dass also im allgemeinen durch $L^2$ die Grösse oder die Wirkung eines dualen Kräftesystems zum Ausdruck gebracht wird.

20. Am Eingang des dritten Kapitels seiner kritischen Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik*) werden von E. Dühring die folgenden Bemerkungen gemacht:

„Ausser dem Satze von den lebendigen Kräften pflegt man noch in den heutigen Darstellungen der Dynamik einige allgemeine Eigenschaften der Bewegungen hervorzuheben, die sich in der Periode seit Newton bis auf Lagrange als besondere charakteristische Prinzipien entwickelt hatten, und deren Fassung oder Auslegung auch mehrfach zu ähnlichen Streitigkeiten Veranlassung gegeben hat, wie die Schätzung der lebendigen Kräfte. In letzterer Beziehung ragte das Prinzip der geringsten Wirkung durch die ursprüngliche metaphysische Art seiner Auffassung hervor und ist noch heute durch die Unbestimmtheit und Veränderlichkeit der Gedanken ausgezeichnet, welche man an seinen

---

*) 2. Aufl., S. 262.

Namen knüpft. Nimmt man noch alle allgemeinen und prinzipiellen Vorstellungen hinzu, welche sich in Rücksicht auf die rein mathematischen Maxima und Minima der Kraftsummen und Kräftefunktionen für die Bewegung und für das Gleichgewicht bemerklich gemacht haben, so befindet man sich zwar in einem prinzipiell sehr interessanten, aber noch keineswegs geordneten Gebiet. Um das Prinzip der geringsten Aktion in seinen verschiedenen Gestalten und Verwandtschaften darzulegen, werden wir die ganze Gruppe der allgemeinen Maximal- und Minimaleigenschaften der Kräftekombinationen ins Auge zu fassen haben.

Die drei anderen Hauptsätze betreffen die Bewegung des Schwerpunktes, die algebraische Summe der nach einer bestimmten Richtung genommenen Bewegungsgrössen und die Erhaltung der Flächen. Mit Ausnahme des letzteren Prinzips fällt hier jeder Zweifel über die engere oder weitere Fassung fort; auch metaphysische Gesichtspunkte sind verhältnismässig wenig eingemischt worden, und die schliessliche Hauptfrage bleibt nur noch die, inwiefern sich diese charakteristischen Sätze nebst demjenigen von den lebendigen Kräften dazu vereinigen, die Hauptrelationen für die Bewegung eines Systems auszudrücken und in dieser Beziehung eine systematisch zusammenhängende Gruppe von Grundeigenschaften der Bewegung beliebiger Körperkombinationen vorzustellen. Der fruchtbarste Gesichtspunkt der Betrachtung dieser Sätze wird hiernach derjenige sein, welcher sich auf den Hauptinhalt der gesamten Dynamik richtet. Unter Hinzunahme des d'Alembertschen Prinzips, welches eine Regel für die Benutzung der Gesetze der Statik innerhalb der Dynamik enthält, wird sich zeigen lassen, dass mit den bisher vorgeführten prinzipiellen Haupteinsichten dieser Periode die Dynamik in ihren wesentlichen Verzweigungen geschaffen und zugleich übersichtlich gemacht ist."

21. Das sogenannte virtuelle Prinzip birgt in sich den Keim zu dem Prinzip der kleinsten Wirkung, indem die durch eine Kraft angestrebte Bewegung immer in der Richtung eintritt, in welcher sich der kleinste Widerstand vorfindet, also die Kraft sich am schnellsten in Geschwindigkeit umsetzen kann, womit auch der Zusammenhang des Prinzips der kleinsten Wirkung mit dem Prinzip der grössten Wirkung zum Ausdruck kommt, denn ein Minimum kann immer nur als Gegensatz eines Maximums und ein Maximum als Gegensatz eines Minimums bestehen. Diese logische Schlussfolgerung scheint sehr einfach zu sein und doch ist man erst sehr spät zu dieser Einsicht gelangt.

Indem sich der geniale Mathematiker Fermat in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts mit einer Methode der Bestimmung der

Maxima und Minima beschäftigte, welche als der Keim der Differentialrechnung anzusehen ist, kam er bei seinen Untersuchungen über das von Descartes aufgestellte Gesetz der Lichtbrechung auf den Gedanken, dass die Natur bei der Bewegungsübertragung dem Minimum der Wirkung zustrebe, das heisst ein Prinzip der kleinsten Wirkung befolge, weil sie sich auf dem kürzesten Wege bethätigt, um mit dem geringsten Kraftaufwande ihren Zweck zu erreichen. Von Maupertuis wurde in der Mitte des 18. Jahrhunderts diese Idee zum Ausgangspunkte genommen, um ein neues Grundprinzip der Mechanik aufzustellen, welches er folgendermassen zum Ausdruck brachte: „Wenn in der Natur eine Veränderung stattfindet, so ist die für diese Veränderung aufgewendete Kraftgrösse möglichst gering". Hierbei wurde die sich bethätigende Kraftgrösse durch das Produkt von drei Faktoren, nämlich der Masse, der Geschwindigkeit und dem mit dieser Geschwindigkeit durchlaufenen Raume dargestellt. Diese sogenannte Aktionsmenge wurde also von Maupertuis durch ein Produkt von der Form $mvs$ ausgedrückt und dieser Ausdruck ist als identisch mit der aus dem Galileischen Fallgesetze zu entwickelnden Formel

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

zu betrachten, wenn $g$ der in der ersten Zeiteinheit des Vorganges entwickelten Geschwindigkeit und $h$ dem in demselben Zeitintervall zurückgelegten Wege, das ist der durchlaufenen Kraftstrecke $\frac{g}{2} = h$ entspricht. Es birgt also der von Maupertuis aufgestellte Ausdruck der kleinsten Wirkung den Begriff der lebendigen Kraft $\frac{v^2}{2}$ in sich, worüber allerdings Maupertuis nicht zur Klarheit gelangt zu sein scheint. Er hatte dabei das gleichzeitige Auftreten der Kraftwirkung und der Kraftveränderung im Sinn und demnach einen vagen Begriff von der Periode der variablen Aktion, mit welcher sich die Kraftentwickelung vollzieht. Diesen Vorgang hat dann später Hamilton durch Aufstellung seines Prinzips der variablen Aktion (the law of varying action) gekennzeichnet und Helmholtz hat mit Bezug auf die variable Periode des elektrischen Stromes die bekannte Gleichung

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

zur Bestimmung der Stromstärke oder Kraftentfaltungsintensität für irgend einen Zeitpunkt dieser Periode aufgestellt. Indem die Kraft bei ihrer Entfaltung sich entweder aus dem Druckzustande in den Geschwindigkeitszustand, oder aus dem Geschwindigkeitszustande in

den Druckzustand umsetzen kann, geht sie einerseits in ein Minimum, anderseits in ein Maximum über. Schon d'Arcy hat nachgewiesen, dass bei der Lichtbrechung das von Fermat gekennzeichnete Minimum der Wirkung gelegentlich ein Maximum werden kann. Von Lagrange wurde der mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung in Verbindung gebrachte Zweckbegriff ganz beiseitegeschoben und das Prinzip mit Rücksicht auf die bei physikalischen Betrachtungen allein anzuerkennende Kausalität rein mathematisch formuliert und als das Prinzip der grössten und kleinsten lebendigen Kraft bezeichnet. Eine weitere Entwickelung des Prinzips wurde durch Hamilton und Jacobi ausgeführt, indem Hamilton in dem Prinzip der geringsten Wirkung, gegenüber dem von ihm aufgestellten Prinzip der variablen Aktion, nur ein Gesetz der stationären Aktion, das heisst ein Gesetz des Gleichgewichtszustandes der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung erblickte. Von Hamilton wurde die Gleichung der lebendigen Kraft in der von Lagrange aufgestellten Formulierung variiert, mit dem Zeitelement multipliziert und dann integriert; er erhielt auf diese Weise die Gleichung seiner charakteristischen Funktion, durch welche eine wirksame Bewegung, die variable Aktion, gekennzeichnet wird, welche für irgend einen Zeitpunkt der Kraftentfaltung gilt und wofür von Helmholtz mit spezieller Berücksichtigung des Ohmschen Gesetzes der Kraftentfaltung die variable Periode des elektrischen Stromes zur Darstellung gebracht wurde. Wie E. Dühring*) bemerkt, wurde durch Hamiltons Gleichung der charakteristischen Funktion die augenblickliche Grösse der lebendigen Kraft in ihrer Häufung zwischen zwei veränderlichen Positionsgrenzen zum Gegenstand einer dynamisch möglichen Variation gemacht.

Analytisch wird das Prinzip der kleinsten Wirkung in der folgenden Weise entwickelt:

Wenn ein Punkt frei oder gezwungen sich auf einer festen Oberfläche unter der Einwirkung solcher Kräfte bewegt, dass die Beziehung besteht

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = a\,\varphi\,(x, y, z),$$

so folgt mit Berücksichtigung dieser das Prinzip der lebendigen Kräfte darstellenden Formel

$$v^2 = 2\,\varphi\,(x, y, z) + C.$$

Demnach besitzt die Kurve, welche dieser Punkt beschreibt, in Bezug auf das Integral $\int v\,ds$ eine merkwürdige Eigenschaft. Wird nämlich der Wert $v = \sqrt{2\,\varphi\,(x, y, z) + C}$ substituiert, so ergiebt das obige zwischen zwei Kurvenpunkten $A$ und $B$ genommene Integral

*) „Lehrbuch der analytischen Mechanik" von Duhamel. 1853. S. 298.

einen Wert, der kleiner ist als der Wert für jede andere von den beiden Punkten $A$ und $B$ begrenzte Kurve, welche auf derselben Oberfläche, auf welcher sich der Punkt bewegt, gezogen werden kann. Es handelt sich also darum nachzuweisen, dass das Integral $\int ds\sqrt{2\varphi(x,y,z)+C}$ zu einem Minimum wird, wenn $x, y, z$ den Gleichungen der betreffenden Kurvenbahn genügen; zu dem Zweck muss nachgewiesen werden, dass die Variation $\delta\int v\,ds$ verschwindet. Wird zwischen den beiden Punkten eine beliebige Kurve angenommen und der materielle Punkt (Kraftpunkt) durch die Einwirkung äusserer Kräfte gezwungen, auf der gedachten Kurve bei seiner Bewegung zu bleiben, so wird seine Geschwindigkeit immer durch die Formel

$$v^2 = 2\varphi(x,y,z) + C$$

ausgedrückt. Die Variationsrechnung liefert aber die Gleichung

$$\delta\int v\,ds = \int \delta(v\,ds) = \int(dv\,.\,ds + v\,\delta\,.\,ds),$$

wobei alle Integrale zwischen den Grenzen $A$ und $B$ genommen sind.

Weiter hat man

$$\delta v\,.\,ds = v\,\delta v\,.\,dt = \tfrac{1}{2}\,\delta(v^2)\,dt$$

und die Gleichung $v^2 = 2\varphi(x,y,z) + C$

giebt $\tfrac{1}{2}\,\delta(v^2) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$

wobei zu beachten ist, dass in den Ausdrücken $X, Y, Z$ die Werte von $x, y, z$ sich auf die Punkte der Kurvenbahn beziehen und dass $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die entsprechenden Koordinaten der unendlich nahen Kurve bedeuten. Durch weitere Entwickelung erhält man

$$\delta\int ds = \frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z.$$

Dieser Ausdruck muss zwischen den beiden Grenzen des Integrals genommen werden, wodurch derselbe verschwindet, indem die Koordinaten der festen Endpunkte $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ gleich Null zu setzen sind. Es genügt sogar, dass die Verschiebung dieser beiden Grenzpunkte $A$ und $B$ der neuen Kurve nach einer zur Kurvenbahn senkrechten Richtung geschieht, um in beiden Fällen die Gleichung zu erhalten

$$\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z = 0.$$

Da die Variation $\delta \int v\,ds$ verschwindet, so wird das Integral $\int v\,ds$ im allgemeinen zu einem Maximum oder Minimum, es ist jedoch ersichtlich, dass das Maximum nicht eintreten kann.

Die Bedingungen, unter denen sich der betreffende Punkt bewegen soll, besagen nichts anderes, als dass dieser Punkt sich auf einer Fläche bewegen soll, die eine Niveaufläche oder Potentialfläche rechtwinklig durchschneidet, wobei die Grenzpunkte der gedachten Kurvenbahn in dieser Niveau- oder Potentialfläche liegen. Wenn der Punkt durch eine $v^2 = 2ps$ auf das in der Niveaufläche herrschende Potential $v^2$ erhoben worden ist und auf diesem Potential erhalten wird, so ist die zu seiner Bewegung zwischen den Grenzpunkten der gedachten Durchschnittskurve erforderliche Verschiebungsarbeit im Vergleich zu anderen in der gedachten Schnittebene durch dieselben Grenzpunkte bestimmten Bahn, die also ausserhalb der gedachten Niveaufläche liegt, ein Minimum, denn die Verschiebungsarbeit in der Niveaufläche ist gleich Null. Die Bedingung des Minimums entspricht also der bekannten, aus dem Fallgesetze abgeleiteten Formel

$$v^2 = 2gh,$$

wodurch die Erhebung der Masseneinheit auf ein Potential ausgedrückt wird. Differenziert man diese Gleichung nach $v$ und $h$, wobei $g$ als konstant angesehen wird, so erhält man

$$v = g\frac{dh}{dv}$$

und es bezeichnet $v$ den Druck, welcher zur Erhaltung des erreichten Potentials aufzuwenden ist. Dieser Druck wird aber nicht als eine Arbeit angesehen, weil derselbe ohne messbare räumliche Verschiebung in der Druckrichtung erhalten bleibt. Berücksichtigt man jedoch, dass bei der Druckerzeugung die äussere Arbeit in innere Arbeit, oder die äussere durch Ortsänderung sich bethätigende Kraft in innere die Spannung erhaltende Kraft übergegangen ist und dass die Druckwirkung nur als eine kinetische Wirkung gedacht werden kann, so muss man auch die Grösse $v = (\sqrt{v})^2$ als eine Grösse von derselben Ordnung wie $v^2$ anerkennen, indem jede Kraftwirkung sich nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung vollzieht und daher dualer Natur ist.

Die letzte Gestaltung erhielt das Prinzip des Maximums und Minimums in dem von Gauss aufgestellten Prinzip des kleinsten Zwanges. Nach dieser Fassung des Prinzips erfolgen die Bewegungen eines Massen- oder Kräftesystems, ohne Rücksicht auf die Verbindungs-

weise der Elemente in jedem Augenblicke in möglichst grosser Übereinstimmung mit der freien Bewegung, also unter dem kleinsten Zwange. Als Mass des Zwanges wurde dabei von Gauss die Summe der Produkte aus dem Quadrat der Ablenkung jedes Punktes von der freien Bewegung in seine Massen- oder Kraftgrösse betrachtet.

22. In der heutigen Physik ist die Ansicht herrschend, dass die allgemeinen Naturgesetze nicht nach Kräftefunktionen, sondern nach sogenannten Energiegesetzen zu beurteilen sind*). Anstatt aber das Wort „Energie“ einzuführen, welches doch auch nur mit Kraft oder Kraftleistungsvermögen zu verdeutschen ist, würde es besser sein, den Kraftbegriff in einer entsprechenden Bedeutung aufzufassen. Diese Bedeutung kommt schon im allgemeinen Sprachgebrauche zur Geltung, indem man die Bezeichnungen: lebendige Kraft, motorische Kraft, Arbeitskraft, Muskelkraft, Keimkraft, Dampfkraft, Wärmekraft, Trägheitskraft u. s. w. benutzt, um die Arbeitsleistungsfähigkeit auszudrücken. Auch deutet die Definition der Kraft nach dem strengen Kausalbegriff auf die Notwendigkeit der Erweiterung des Kraftbegriffes hin, indem man danach, wie schon auf S. 5 angeführt wurde, die Kraft als Ursache der Bewegung selbst als Bewegung, das ist als Arbeitsgrösse anzusehen hat. Wie in der modernen Chemie die Atome als Moleküle höherer Ordnung gelten, so muss man auch die Kraft unter dem Begriff des Galileischen Moments als eine Arbeitsgrösse höherer Ordnung gelten lassen. Die Kraft als Arbeitsmenge oder Masse ist stets dreidimensional, mag man sie gelegentlich auch nur nach der Flächendimension oder nach der Längendimension, d. i. in der Parallelschaltung oder in der Hintereinanderschaltung der Arbeitselemente in Betracht ziehen. Mit Einführung des Fremdwortes Energie ist man auch wohl zu der Ansicht gelangt, das Wort Kraft sei ganz aus der Mechanik bezw. Physik zu entfernen. Will man aber die Naturwirkungen einheitlich erfassen, so dürfte „Kraft“ das geeignetste Wort dafür sein, sobald man die Thätigkeitsgrösse oder Thätigkeitsmenge, das latente Wesen der kinetischen Arbeit, das ja auch in der Masse sich darstellt, treffend bezeichnen will. Dagegen ist das Wort „Stärke“, als Ersatz des Wortes Intensität, wohl genügend und somit würde man Kraftgrösse und Kraftstärke zu unterscheiden haben.

In der Elektrizitätslehre hat man in dieser Beziehung bereits das Wort „Kraft“ im Ausdruck „elektromotorische Kraft“ in obigem Sinne zur Geltung bringen wollen. Mit elektromotorischer Kraft bezeichnet man die Ursache des Stromes, das in den Leiter eintretende latente

---

*) Schwartze, „Die Lehre von der Elektrizität“, S. 51.

Arbeitselement, das sich als Stromstärke gegen den Widerstand entfaltet. Hierbei ist daran zu denken, dass die als „Ampère“ bezeichnete Einheit der Stromgrösse wiederum als ein Arbeitselement, als eine Kraft höherer Ordnung, gewissermassen als ein Kraftatom gegenüber der elektromotorischen Kraft zu gelten hat.

Im gleichen Sinne ist das Potential, als Aktion der elektromotorischen Kraft gegen die Widerstandseinheit, gegenüber der für beliebige Leiterlängen geltenden elektromotorischen Kraft, als eine Kraft höherer Ordnung anzusehen.

In diesem Sinne erfasst, dürfte das Wort „Kraft“ dem Fremdwort „Energie“, das im Grunde genommen auch nicht mehr besagt, wohl vorzuziehen sein.

Das, was man gegenwärtig unter der Bezeichnung „potentieller Energie“ versteht, ist unter dem Begriff „latenter Arbeit“ durch Kraftgrösse auszudrücken. Und was man unter „kinetischer Energie“ versteht, ist im Begriff der „Kraftstärke“ enthalten, womit die raumzeitliche Entwickelung der Kraftgrösse, das ist die in messbarer Bewegung sich entfaltende Kraft, die nicht in blosser Geschwindigkeit, sondern in Geschwindigkeitsänderung, besteht, zum Ausdruck kommt. Die Kraftstärke ist nur in der variablen Periode eines Naturvorganges vorhanden, indem dabei Wirkung und Gegenwirkung, motorische Kraft und motorische Gegenkraft, positiver Strom und negativer Strom, Selbstinduktion und Kapazität zum periodischen Ausgleich kommen. Die Kraftstärke ist Dynamik, Kinetik, Bewegung, Zustandsänderung, also nicht bloss dauernde, ortsändernde Geschwindigkeit, bei welcher keine Änderung des innerlichen Kraftzustandes eines Systems zur Geltung kommt. Die Kraft tritt als kinetischer Druck im Maximum der Stärke auf und ist dann gleichwie im Minimum ihrer Entfaltung als Geschwindigkeit zeitlos, weil veränderungslos.

Die in sich beruhende Kraft, die nach Meterkilogramm zu messen ist, giebt keinen Anlass, sie mit dem Zeitverlauf in Beziehung zu bringen, denn sie ist in ihrer Grösse unabhängig von der Zeit.

Betrachtet man die Formel $\frac{v^2}{2} = g h$, so ist zu bemerken, dass die Grössen $g$ und $h$ in umgekehrter Beziehung zur Zeit stehen, denn $g$ ist gleich $h/t^2$ und $h = g t^2$, so dass zu setzen ist

$$\frac{v^2}{2} = g t^2 . h/t^2,$$

woraus hervorgeht, dass in dem Produkt $g h$ die Zeit ausgeschieden ist und demnach der Begriff der lebendigen Kraft, als auf der Vorstellung gleichförmiger Bewegung beruhend, eine zeitlose Grösse ist.

Nur das praktische Bedürfnis der Messung muss die Zeit zu Hilfe nehmen, weil wir die Kräfte nur nach ihren Stärken bestimmen können, denn um Kräfte zu messen, muss man dieselben zur Entwickelung bringen und in der Entwickelung tritt die relative Stärke der Kraft, die Selbstinduktion der Kraft hervor, die sich nach der ihr entgegengesetzten Kapazität oder dem sogenannten Widerstande regelt. Hierbei wird die Kapazität $(LT^{-2})$ das dynamische bezw. elektromagnetische Prinzip, die Induktion der Kraft $(L^{-1}T^{2})$ als das statische, bezw. elektrostatische Prinzip betrachtet und das Produkt ist die zeitlose absolute Einheit der in gegenseitiger Induktion zu stande gekommenen, auf Wirkung und Gegenwirkung beruhenden dualen Kraft, welche dem Maximum der vorhergegangenen Kraftentfaltung, aber dem Minimum der bestehenden Kraftäusserung entspricht. Hieraus geht hervor, dass Jacobi, der in seinen bereits erwähnten Vorlesungen über Dynamik zur Feststellung des Begriffs der geringsten Wirkung die Elimination der Zeit aus dem Ausdruck der lebendigen Kraft verlangte, Recht hatte; dasselbe gilt aber auch für den Begriff der grössten Wirkung. Es sind dies abstrakte Klarstellungen der Begriffe, wobei nur die reine Kausalität zur Berücksichtigung kommt, die nach dem Nützlichkeitsprinzip einen Zweck verfolgende Messung der Kräfte aber ausser acht gelassen ist.

23. W. Wundt sagt in seiner Methodenlehre*):

„Für die Mechanik vollziehlt sich in der Hervorhebung kausaler Prinzipien eine Rückkehr zu dem Zeitalter Galileis. Diese Beziehung macht sich vor allem darin geltend, dass man die mechanischen Prinzipien wieder auf die einfachsten Bewegungsvorstellungen zu gründen sucht. In diesem Sinne war zunächst d'Alembert bemüht, den Begriff der Kraft, der in der teleologischen Periode der Mechanik und namentlich in dem berühmten Streit über das Kräftemass vielfach verdunkelt worden war, wieder auf die anschaulichen Elemente zurückzuführen, die er bei Galilei und Newton gehabt hatte, und damit geht Hand in Hand sein Streben, die wegen ihrer nützlichen Anwendungen nicht zu entbehrenden Erhaltungsprinzipien aus den einfachen dynamischen Vorstellungen abzuleiten. Das von ihm begonnene Werk führte Lagrange zu Ende. Schon d'Alembert hatte mit der kausalen Betrachtung den Plan verbunden, aus einem durch unmittelbare Evidenz oder durch einen ausdrücklichen Beweis feststehenden Fundamentaltheorem alle übrigen Sätze abzuleiten. Aber das von ihm aufgestellte Prinzip eignete sich weder zu einer hinreichenden allgemeinen

*) Logik, 2. Bd. 1. Aufl. S. 266.

Formulierung der Bewegungsgesetze noch in der von ihm gegebenen Fassung zu einer Verbindung der Statik mit der Dynamik, auf die es doch hinwies. Dies leistete erst Lagrange, indem er auf dasjenige Prinzip zurückging, welches schon dem d'Alembertschen Satze stillschweigend zu Grunde lag, nämlich auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, das er in einer Weise verallgemeinerte, in welcher es sich zur Ableitung aller anderen statischen und dynamischen Prinzipien geeignet erwies. Auch in dieser Hervorkehrung des virtuellen Prinzips lag eine Rückkehr zu den Anschauungen Galileis, der dasselbe in einfacherer Gestalt bereits besass, wenn ihm auch der Name fehlte. Diese Rückkehr ist aber doch zugleich verbunden mit einer Umkehrung der Betrachtungsweise. Galilei hatte dynamische Vorstellungen in die Statik eingeführt. Dazu hatte ihm der Begriff des virtuellen Momentes gedient. Lagrange führte jedes dynamische Problem auf ein statisches zurück, was freilich wiederum nur dadurch möglich war, dass in Folge jener Galileischen Anschauung das Gleichgewicht als ein Grenzfall der Bewegung erscheint."

„Das Prinzip von d'Alembert bildet zu dieser systematischen Gestaltung der gesamten Statik und Dynamik auf Grund eines einzigen kausalen Grundsatzes die Vorbereitung. Es lautet in der von d'Alembert selbst gegebenen Formulierung: Um die wirklichen Bewegungen eines Systems von Körpern zu finden, die mit einander im Zusammenhange stehen, zerlege man die jedem Körper mitgeteilten Bewegungen $a, b, c \dots$ in je zwei andere, $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \dots$ Diese sollen so beschaffen sein, dass, wenn man dem Körper die Bewegungen $a_2, \beta_2, \gamma_2 \dots$ allein mitteilte, das System im Gleichgewichte sein würde. Es werden dann die Bewegungen $a_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$ zugleich diejenigen sein, welche der Körper wirklich annimmt*). Die Nützlichkeit dieses Prinzips besteht darin, dass dasselbe in allen Fällen, wo bewegende Kräfte unter bestimmten Bedingungen einwirken, eine Zerlegung des Produktes in einen statischen und dynamischen Teil herbeiführt, worauf nach Feststellung der im Gleichgewicht stehenden oder der sogenannten „verlorenen Kräfte" die übrigbleibenden wie freie Kräfte behandelt werden können. Es liegt nahe, diesem Resultat eine solche Wendung zu geben, dass der Bewegung vollständig der Fall des Gleichgewichts substituiert wird. Dies geschieht dann, wenn man zu den übrigbleibenden Kräften $a_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$ solche von gleicher Grösse aber entgegengesetzter Richtung hinzugefügt denkt. Diese Wendung ist dem d'Alembertschen Prinzip in der That später gegeben

*) d'Alembert, „Traité de dynamique", p. 51. Paris, 1743.

worden, und es ist dasselbe dadurch zu der von Lagrange vollbrachten Zurückführung der Dynamik auf die Statik in noch nähere Beziehung getreten. Eine besondere Beweisführung für das Prinzip hat sein Urheber nicht für nötig erachtet; vielmehr betrachtet er dasselbe als eine unmittelbar einleuchtende Folge der vorgenommenen Kräftezerlegung. Da jede solche Zerlegung sich stützt auf das Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte, so ist aber jedenfalls die letztere vorausgesetzt."

„Die oben angeführte Veränderung des d'Alembertschen Prinzips, durch welche jedes dynamische Problem auf ein statisches Problem zurückgeführt wird, scheint den nächsten Anlass zu der von Lagrange unternommenen einheitlichen Gestaltung der Mechanik auf Grund eines einzigen kausalen Fundamentalgesetzes gewesen zu sein. Als solches diente ihm das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, dem er die Bedeutung eines allgemeinsten statischen Gesetzes giebt. Massgebend für dieses Prinzip ist zunächst der Begriff des „virtuellen Momentes", unter welchem man das Produkt einer Kraft in die im Sinne ihrer Wirkung zurückgelegte unendlich kleine geradlinige Wegstrecke versteht. Dies vorausgesetzt, lautet das Prinzip: „Ein zusammenhängendes System von Körpern oder Punkten (Kraftpunkten) ist im Gleichgewicht, sobald die Summe seiner virtuellen Momente gleich Null ist. Man ermittelt also hier die Bedingungen des Gleichgewichts, indem man sich denkt, jede einzelne Kraft übe eine ihrer Grösse entsprechende, aber unendlich kleine Wirkung aus, und dann feststellt, dass die Summe aller so gebildeten positiven und negativen virtuellen Geschwindigkeiten gleich Null ist*)"."

24. Wie schon an einer vorhergehenden Stelle bemerkt wurde, ging Lagrange bei seinen Bestrebungen nach einer einheitlichen Gestaltung der Mechanik und nach der innigen Verknüpfung der Statik mit der Dynamik auf den von Galilei ins Auge gefassten Begriff des Momentes zurück, worin der Keim des virtuellen Prinzips schon vorhanden war. Auf diesen Begriff begründete Lagrange die Herleitung seiner allgemeinen Grundformel, mittels welcher er die Dynamik auf die Statik zurückführen wollte. Schon früher hatte Johann Bernoulli eine allgemeinere Formulierung des virtuellen Prinzips aufzustellen unternommen und zwar in dem Satze: „Zwei Agentien sind im Gleich-

---

*) Diese unendlich kleine Wirkung ist gegeben durch das Differential $d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\,d\,v$, wobei aber $v$ als konstante Geschwindigkeit gleich der durchlaufenen Kraftstrecke $s$ gesetzt werden kann, so dass in diesem Sinne $\frac{v^2}{2} = \frac{s^2}{2}$ ist. Mit Bezug auf die differentielle Wirkung $d\,v$ ist die Wirkung ein Minimum; mit Bezug auf die durchlaufene Kraftstrecke $s$ ein Maximum.

gewicht oder haben gleiche Momente, wenn ihre absoluten Kräfte im umgekehrten Verhältnis ihrer virtuellen Geschwindigkeiten stehen, mögen die aufeinanderfolgenden wirksamen Kräfte in Bewegung oder in Ruhe sein". Er erachtete dies für ein allgemeines Prinzip der Statik und Dynamik. Lagrange hielt das Prinzip der virtuellen Momente für das wichtigste Grundprinzip der ganzen Mechanik und versuchte, dieselbe daraufhin systematisch zu entwickeln. Er verfiel dabei jedoch auf die merkwürdige Idee, dieses Prinzip aus dem sogenannten Flaschenzuge ableiten zu wollen, wodurch natürlich seine Beurteilung des Kräftespiels eine einseitige und beschränkte werden musste. Nur die Anschaulichkeit der Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit und die dadurch angedeutete Zerlegung der Arbeitskraft in ihre Faktoren ist dabei von Interesse. Berücksichtigt man hierbei, im Sinne Galileis, die Herleitung der Arbeitskraft aus der Muskelkraft, welche durch den Pulsschlag aufrechterhalten wird, so wird klar, dass keiner der beiden Kraftfaktoren, weder Geschwindigkeit noch Druck, sich absolut nullieren kann, sondern dass auch im Zustande des relativ statischen Gleichgewichts ein pulsierendes Kräftespiel stattfinden muss. Lagrange wollte mit diesem Kunstgriff der Einführung des Flaschenzugs das Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte umgehen, weil er das virtuelle Prinzip für das allgemeinere hielt. Unzweifelhaft bildet der Flaschenzug rücksichtlich der anschaulichen Zerlegung der Kraft in ihre Faktoren ein interessantes Kraftzerlegungsmittel, aber zur Herleitung eines allgemeinen Kraftwirkungsgesetzes ist derselbe ebenso wenig wie irgend ein anderer Mechanismus geeignet. Bei dem virtuellen Prinzip ist die Reduktion der Kraftrichtungen auf die Ablenkungsrichtungen der Kräfte die Hauptsache und daher kann dasselbe nur aus der Zusammensetzung der Kräfte hergeleitet werden, so dass das Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte nach dem Parallelogrammgesetz nicht bloss in seiner oberflächlichen gewöhnlichen Fassung, sondern nach seiner tiefergehenden Bedeutung in Anschauung gebracht, als das erste Grundprinzip der Mechanik zu gelten hat.

Aus seiner Betrachtung des Flaschenzugs leitete Lagrange die Gleichung der virtuellen Momente nach der Formel ab:

$$e_1 P + e_2 P_2 + e_3 P_3 + \ldots = 0,$$

worin $P$ die verschiedenen als an Fäden hängende Gewichte gedachten Kräfte und $e$ die kleinen Verschiebungen bedeuten, welche diese Gewichte durch ein Gegengewicht erleiden. Wenn diese Verschiebungen sich bei der Summierung nullieren, so ist Gleichgewicht vorhanden. Durch diese Formel wird also nichts gelehrt, als was sich sozusagen

von selbst versteht. Es wird dabei angenommen, dass die Kräfte, die in einer und derselben geraden Linie auf ein starres Massensystem einwirken, sich in Bezug auf diese Wirkungen algebraisch addieren lassen und dass die Grösse einer Kraft an sich nicht verändert wird, wenn man derselben durch irgendwelche äussere Hilfsmittel eine veränderte Richtung giebt. Diese beiden Voraussetzungen liegen allen Sätzen über die Kombination von Kraftwirkungen, insbesondere aber auch dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte zu Grunde. In anderer Form ist der Ausdruck der virtuellen Gleichung des Gleichgewichts

$$Pdp + Qdq + \ldots = 0.$$

In seiner Statik wird diese Grundformel von Lagrange in einer noch anderen und allgemeineren Form aufgestellt, wobei die gegebenen Kräfte als freie Kräfte gelten, indem die unbestimmten Kräfte hinzutreten. Die Bedingungsgleichungen sind in Koordinaten darzustellen und das allgemeine Gesetz für die Bewegung freier Systeme beruht auf der folgenden Betrachtung:

Welche Verbindungen auch in einem bewegten System herrschen mögen, so findet doch in Folge dieser Verbindung beständig Gleichgewicht statt zwischen den Kräften, deren Komponenten sind

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dieses Gleichgewicht wird nicht gestört werden, wenn man neue Verbindungen hinzufügt, welche das System der Punkte zu einer starren Masse machen; die Gleichungen, welche dann das Gleichgewicht ausdrücken, finden daher wirklich statt, wenn man die Verbindungen so lässt, wie sie gegeben sind*).

Um die Grundgleichung der Dynamik zu erhalten, wurde von Lagrange das folgende Verfahren angewendet: An die Stelle der Null auf der einen Seite seiner statischen Grundgleichung der virtuellen Momente, wie sie vorhin dargestellt worden ist, treten die Glieder, welche die resultierenden Bewegungen ausdrücken: Bringt man dieselben auf die andere Seite der Gleichung, um die allgemeine Form der Beziehung auf Null wiederherzustellen, so sind die Vorzeichen jener Glieder in die entgegengesetzten umzuwandeln, womit angedeutet ist, dass die den Bewegungsresultanten entsprechenden Kräfte ebenfalls im entgegengesetzten Sinne zu nehmen sind, um mit den anderen Kräften das Gleichgewicht herzustellen. Die Bewegung ist also die

*) „Lehrbuch der analytischen Mechanik" von Duhamel, 2. Bd., S. 79.

allgemeinere Vorstellung und das Gleichgewicht nur ein spezieller Fall der Kräftezusammensetzung. Da man nun jede für den Vorgang einer Bewegung geltende Gleichung nach rein algebraischen Grundsätzen auf Null bringen kann, indem man die Vorzeichen der auf der einen Seite befindlichen Glieder wechselt, so ist eben nur ein Grund für diesen Wechsel anzunehmen, um den Satz zu erhalten, der vorher als das d'Alembertsche Prinzip aufgestellt worden war.

Durch die analytische Bearbeitung der Formel des virtuellen Prinzips gewann Lagrange die drei prinzipiellen Hauptsätze von der Bewegung des Schwerpunktes, vom Prinzip der Flächen und von der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Das Prinzip der Erhaltung der Flächen wurde bekanntlich zuerst von Kepler als ein rein empirisches Gesetz aufgestellt und zwar als das erste seiner drei berühmten Grundgesetze über die Planetenbewegung. Dieses Gesetz lautet: Die Planeten beschreiben bei ihrer Bewegung in Bezug auf die Sonne ebene Kurven, und ihre nach dem Mittelpunkte der Sonne gezogenen Vektoren (oder Kraftstrecken) beschreiben Flächenräume, welche der Zeit proportional sind. Von Newton wurde das Prinzip der Flächen aus dem von ihm aufgestellten Trägheitsgesetze, ferner aber auch aus dem Satze des Kräfteparallelogramms abgeleitet. Dieser Newtonsche Lehrsatz ist als eine Verallgemeinerung des oben erwähnten ersten Keplerschen Gesetzes zu betrachten; er lautet: „Wenn Körper sich in Bahnen bewegen, deren Radien nach dem festen Mittelpunkte des Kräftesystems gerichtet sind, so liegen die von ihnen beschriebenen Flächen in festen Ebenen und sind den Zeiten proportional". Hiernach werden durch diese von den Vektoren beschriebenen Flächen Intensitäten dargestellt, wie im vierten Kapitel bei der Behandlung des Parallelogramms der Vektoren in einer noch allgemeineren Theorie der Kräftezusammensetzung nachgewiesen werden wird. Durch Euler, Daniel Bernoulli und d'Arcy wurde dieser Satz noch allgemeiner aufgefasst, indem er auf ein System von Körpern, die in verschiedenen Ebenen sich um ein festes Zentrum bewegen, ausgedehnt wurde. Hierbei ergab sich die Notwendigkeit, diese verschiedenen Drehungsebenen auf eine einzige Ebene zu projizieren, für welche der ursprüngliche Satz Geltung behielt. Der Satz vom Prinzip der Erhaltung der Flächen ist mit Bezug hierauf nunmehr in der folgenden allgemeinsten Fassung aufzustellen: „Wenn beliebige Massen um ein Zentrum rotieren, so ist die Summe der Produkte der Massen in die Projektionen der von ihren Radiusvektoren beschriebenen Flächenräume auf eine und dieselbe Ebene der Zeit proportional", oder in anderer Fassung: „Wenn die Bewegungen eines um ein Zentrum rotierenden Systems auf eine und dieselbe Ebene projiziert werden, so

ist die Summe der Produkte der Massen in ihre Geschwindigkeiten und in die Abstände vom Kraftzentrum eine konstante Grösse". Diese letztere Formulierung lässt erkennen, dass das Prinzip der Flächen eine besondere Bedeutung für drehende Bewegung hat*). Es lässt diese letztere Fassung des Prinzips der Flächen aber auch erkennen, dass es stets ausreichend ist, die Beziehungen der in einem System vereinigten Kräfte in einer Ebene zu untersuchen, weil nur die in einer Äquipotentialfläche wirksamen Kräfte in der einfachsten Beziehung zu einander sich befinden. Das Prinzip der Flächen steht also in engster Beziehung zur Rotationstheorie. Erst durch Poinsot ist das Prinzip der Flächen an den ihm gebührenden Platz unter den ersten Elementen der Statik und Dynamik erhoben worden.

E. Dühring bemerkt darüber in seiner „Kritischen Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik"**) Folgendes: „Wenn Rotation bestehen soll, so muss ein Überschuss der Drehungsmomente in dem einen oder anderen Sinne (also entweder für Rechts- oder für Linksdrehung) in der Form von beharrenden Bewegungsgrössen vorhanden sein. Das Prinzip von Aktion und Reaktion, für welches man eine genau entsprechende Anwendung auch für den Fall der Sinnesverschiedenheit der Drehungsmomente erwarten könnte, hat in dieser Richtung bis jetzt zu keinen besonderen Aufschlüssen geführt, da man die Erzeugung der eigentlichen Rotationen in einer Weise, die in dem Spiel stetiger Kräfte die Symmetrie von Aktion und Reaktion hervortreten lässt, noch nicht in das Auge gefasst hat".

Im vierten Kapitel wird bei der Behandlung der Rotationstheorie auf diesen Umstand besonders Bezug genommen und durch die Aufstellung des Prinzips vom dynamischen Schwerpunkte die Wirkung der Aktion und Reaktion bei dem Rotationsvorgange volle Berücksichtigung finden.

Von Poinsot wurde die Theorie der Momente und der Flächenräume mit in die Theorie der Kräftepaare eingeschlossen und mit Rücksicht auf die Dynamik wird von ihm angedeutet, dass die Erhaltungsvorstellungen in Beziehung auf translatorische Kräfte und auf rotatorische Momente oder Flächenräume sich einfach aus der verallgemeinerten Zusammensetzung der Kräfte ergeben. Mittels des im vierten Kapitel behandelten Vektorenparallelogramms wird diese Aufgabe in allgemeinster Weise gelöst.

Aus alledem geht hervor, dass das Prinzip der Flächen mit dem Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte in engster Beziehung steht,

*) W. Wundt, „Methodenlehre". 1. Aufl. S. 262.
**) a. a. O. Zweite Aufl. S. 277 und 413.

worauf auch Dühring hinweist, der bezüglich des letzteren Prinzips noch Folgendes bemerkt*).

„Die Zusammensetzung der Kräfte kann in einem sehr allgemeinen Sinne gefasst werden, der weit über die Vorstellungen hinausführt, die sich an das Parallelogrammgesetz zu knüpfen pflegen. Indessen der wichtigste Schritt muss noch weiter tragen und sogar die Zusammensetzung der lebendigen Kräfte als eine analoge Grundform der Vereinigung dynamischer Wirkungen erkennen lassen. Hierdurch wird die Lehre vom Stoss der elastischen Körper die Brücke zu prinzipiellen Einsichten und die gesamte Theorie des Stosses zeigt sich in ihrem fundamentalen Charakter und in ihrer Bedeutung für das gesamte mechanische Denken."

Indem Lagrange das virtuelle Prinzip, das bei ihm als Grundlage der gesamten Mechanik gelten soll, aus dem sogenannten Prinzip des Flaschenzugs abzuleiten versucht, macht er sich einer Inkonsequenz insofern schuldig, als er dem natürlichen Kräftespiel, das nach seiner ausdrücklichen Hervorhebung auf der Wirkung ferner, nach Massgabe von Distanzfunktionen sich entfaltender Kräfte beruhen soll, ein zwangläufiges System zu Grunde legt. Den daran sich knüpfenden Schlussfolgerungen kann daher auch keine besonders wichtige Bedeutung beigelegt werden. Mit Recht bemerkt Wundt**), dass der Flaschenzug gar nicht als ein besonderes Prinzip angesehen werden kann, sondern nur die Bedeutung einer Veranschaulichung hat. Diese Veranschaulichung hat eine scheinbare Bedeutung nur dadurch erhalten, dass gewisse Voraussetzungen hinzugedacht worden sind. Erstens nämlich wird angenommen, dass die Kräfte, die in einer und derselben geraden Linie auf ein starres Massensystem einwirken, sich in Bezug auf diese Wirkungen algebraisch addieren lassen, und zweitens wird vorausgesetzt, dass die Grösse einer Kraft an sich nicht verändert wird, wenn man derselben durch irgend welche äussere Hilfsmittel eine veränderte Richtung giebt. Diese auf einer beschränkten und einseitigen Anschauung beruhenden Voraussetzungen sind seitdem allen Sätzen über Kräftekombinationen, insbesondere aber dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte zu Grunde gelegt worden.

25. Die Annahme starrer Massensysteme in mechanisch-physikalischen Betrachtungen steht, wie schon oben bemerkt wurde, mit der von Lagrange selbst und nach ihm insbesondere auch von Hamilton ausdrücklich betonten Voraussetzung, dass alle natürlichen Kraftverhältnisse und Kraftwirkungen auf dem Vorhandensein freier Kraft-

*) a. a. O. S. 153.
**) „Methodenlehre." 1. Aufl. S. 269.

punktsysteme beruhen, im direkten Widerspruch. Durch die Betrachtung starrer Massen- und Punktsysteme kann man nicht zur Aufstellung allgemeiner Naturgesetze gelangen und eine darauf begründete Mechanik hat höchstens abstrakt mathematischen, aber keinen physikalischen Wert.

Das virtuelle Prinzip hat den Vorzug, dass es die Beziehung der Kräfte zu einer Richtungsänderung in einfachster Form zur Anschauung bringt. Es zeigt sich dadurch, dass durch jede Richtungsänderung einer Kraft die Kraft selbst verändert wird, so dass also die obige Voraussetzung, nach welcher Lagrange sein Flaschenzugprinzip begründete und welche man auch in der heutigen Mechanik noch dem Kräfteparallelogramm, sowie allen Kräftekombinationen, insbesondere auch der Bewegung eines Punktes im Kreise zu Grunde legt, prinzipiell unrichtig ist.

26. Zu den wichtigen kausalen Fundamentalprinzipien wird auch das von Poinsot ums Jahr 1830 eingeführte rein geometrisch hergeleitete Prinzip der Kräftepaare gezählt. Man erblickt darin eine wichtige Bereicherung des Zusammensetzungsprinzips der Kräfte, indem man der Ansicht ist, dass man mittels des Kräfteparallelogramms die Drehungsresultanten nicht zu bestimmen vermöge, weil die Zusammensetzung der Kräfte nach dem Parallelogrammgesetz wesentlich auf der Voraussetzung beruhe, dass die Kräfte an einem einzelnen Punkte zum Angriff kommen. Diese Annahme beruht auf einem Irrtum, denn es wird später nachgewiesen werden, dass die Grundformel der Kreisbewegung, sowie der cykloidischen Schwingung sich aus dem Parallelogrammgesetz herleiten lässt.

Poinsot dachte bei der Aufstellung seines Begriffes des Kräftepaares nur an die geometrische Verbindung zweier gleicher paralleler Kräfte durch eine starre Linie, so dass sein Prinzip keine physikalische und somit auch eigentlich keine mechanische Bedeutuug hat. In dieser Beziehung scheint auch Poinsot selbst seinem sogenannten Prinzip keine Bedeutung beigelegt zu haben, denn er bestimmt im allgemeinen und prinzipiell gar nichts über die Art, wie man sich dieses sogenannte Ensemble der Kräfte in mechanischer Beziehung, das heisst mit Bezug auf die gegenseitige Einwirkung in Folge der gedachten Verbindung zu denken habe. Allerdings vermeint er in der gegenseitigen Entfernung der beiden parallelen gleich gross gedachten Kräfte eine mechanische Bedeutung zu erblicken, dies geschieht aber nur in der Weise, in welcher schon Archimedes das Wirken der Kräfte an einem Hebelarme in Betracht gezogen hat. Das Poinsotsche Kräftepaar hat das Produkt aus einer der beiden gleichen Kräfte in ihrem gegenseitigen Abstand zum Mass und wie in der älteren Mechanik mit den Momenten gerechnet wurde, so operiert Poinsot mit seinen Kräfte-

paaren und der entsprechenden Kraftwirkung. Wenn also E. Dühring in seiner „Kritischen Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik“ *) sagt: „Der prinzipiell neue und für die Ordnung der Elemente der Mechanik hochwichtige, ja zur Vervollständigung der fundamentalen Nachweisungen unentbehrliche Begriff, den Poinsot auffand, ist der des Kräftepaares“, so ist dies eine ganz ungerechtfertigte Überschätzung des Poinsotschen Satzes.

Nach Poinsot liefert die gewöhnliche Berechnungsweise, durch welche man die Resultante von zwei parallelen Kräften bestimmt, in dem besonderen Falle, wo zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte in die Formel eintreten, ein sinnloses Ergebnis, nämlich die Anbringung einer Kraft gleich Null in einer unendlichen Entfernung. Es geht daraus hervor, dass man bezüglich der Führung eines Punktes im Kreise, das heisst: bezüglich der Rotation zwei periodisch sich ausgleichende, im entgegengesetzten Sinne an diesem Kraftpunkte wirksame Kräfte zu denken hat, deren Distanz unendlich klein oder auch wohl absolut Null ist, so dass dagegen jede endliche Entfernung des Drehungspunktes, nach jener unendlich kleinen Distanz als Streckeneinheit gemessen, als unendlich gross erscheint. Eine rotierende Bewegung kann nur aus dem Zusammenwirken zweier lebendiger Kräfte, das heisst zweier dualer in Arbeitsgrössen sich entfaltender Kräfte hervorgehen, wobei diese beiden Kräfte periodisch abwechselnd sich als Wirkung und Gegenwirkung entfalten, denn nur dadurch kann die fortwährende Richtungsänderung im freien Spiel der Kräfte zum Ausdruck kommen.

Ein Poinsotsches Kräftepaar hat nur die Bedeutung eines flüchtig skizzierten phoronomischen Bildes, wobei man sich etwa eine Stange mit zwei Zugseilen denken kann. Die Drehung kann dann nur so vor sich gehen, dass man die Stange in ihrer Mitte auf einen Zapfen steckt und beispielsweise an den Zugseilen im entgegengesetzten Sinne zwei gleichstarke Zugtiere wirken lässt. In ähnlicher Weise begnügt man sich wohl auch in den Lehrbüchern der Physik, die Zusammensetzung der Kräfte mit Anwendung von Seilen und Gewichten darzustellen. Auf diesem Wege kann man aber nicht zu einem richtigen Begriff über das Zusammenwirken freier, zu einem System vereinigter Kräfte gelangen. Die Bedeutung des Poinsotschen Kräftepaares ist also nach alledem in ganz ungerechtfertigter Weise überschätzt worden und von einer wichtigen Bereicherung der Mechanik durch den Poinsotschen Satz kann nicht die Rede sein.

Auch die Poinsotsche hoch gerühmte Rotationstheorie hat ein rein geometrisches gekünsteltes Gepräge, aber keine physikalische

*) 2. Aufl. S. 401.

Bedeutung, so wenig, wie die zahlreichen sich daran knüpfenden mathematischen Abhandlungen über die freie Rotation der Körper um einen Stützpunkt; dieselben sind zum Teil auch nur zu dem Zwecke vorgenommen worden, um neue mathematische Behandlungsweisen, nicht aber um wirkliche Bereicherungen des mechanischen Wissens bezüglich des Stoffes zu erzielen.

27. Die Erkenntnis, dass die oszillatorische oder wellenartige Bewegung die mechanische Grundform der Naturvorgänge ist, lag eigentlich schon der einfachen Atomistik zu Grunde, wie sie von Epikur aufgestellt und dann von Boscovich mit Bezugnahme auf Kraftzentren modifiziert worden ist. Diese an den Massen- oder Kraftelementen sich vollziehenden Schwingungen werden gewöhnlich als Störungen eines stabil gedachten, ein absolut statisches Gleichgewicht repräsentierenden Urzustandes angenommen, indessen kann ein vorhandener Kraftzustand ohne irgend welche zu Grunde liegende Bewegungsform überhaupt nicht gedacht werden. Der Begriff der als neutral angesehenen Masse schliesst einen solchen Kraftzustand in sich ein, denn jede Masse ist als das Produkt eines vorhergegangenen, die Masse erzeugenden Kraftwirkungsprozesses anzusehen. Unter dem Begriff der Masse hat man nicht nur gravitierende oder ponderable Materie zu verstehen, wie ja überhaupt die Schwere nicht als eine wesentliche Eigenschaft der Materie zu gelten hat, indem dieselbe bei den um einen ausserhalb ihres Schwerpunktes gestützten rotierenden Massen in Folge der Präzession als aufgehoben erscheint. So wenig also der Begriff der allgemeinen Materie durch die Feststellung der Wägbarkeit eingeschränkt ist, ebenso wenig begrenzt sich die Mechanik durch eine so enge Vorstellung. Wenn es auch bis jetzt nur — wie E. Dühring bemerkt*) — hypothetische Medien sind, auf welche sich über den Kreis der als ponderabel erkannten Materie hinaus die mechanischen Raisonnements erstrecken, so ist diese Unvollkommenheit doch nur als provisorisch anzusehen. Der Hauptmangel liegt vorläufig in der Unbekanntschaft mit dem, was man im Äther oder in andern hypothetischen Medien als Menge der Materie betrachtet und mit den sonstigen mechanischen Massen vergleichen könnte. Wäre der Widerstand, von dem die Bahnveränderungen der Kometen Zeugnis geben**), wirklich auf den Äther und nicht etwa auf kleine ponderable Massen oder Massenteilchen zurückzuführen, so wäre die unmittelbare Gegenseitigkeit in der Bewegungsübertragung von der einen Art der Materie auf die andere nach Analogie der Bewegung in gravitierenden Medien sehr nahe

*) „Krit. Gesch. der allg. Prinzipien der Mechanik.“ 2. Aufl. S. 464 ff.

**) Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch für 1861. S. 319 ff.

gelegt. Übrigens ist aber auch die Brücke von den thermischen zu den mechanischen Erscheinungen geschlagen, und es fehlt nur an der Zerlegung der von der Wärme vorgestellten mechanischen Phänomene nach Massgabe einer Unterscheidung der Masse des Mediums von den affizierenden Bewegungsursachen. Wenn man bei Erörterung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen von der Masse redet, so ist damit keineswegs der Begriff der Menge einer allgemeinen Materie gekennzeichnet, vermöge dessen man die verschiedenartigsten Kräfteerscheinungen auf einen einzigen gleichartigen Träger zu beziehen vermöchte. Die Anwendung der mechanischen Prinzipien bleibt daher auch hier für jetzt noch in ziemlich enge Schranken gebannt, die sich nur in dem Masse erweitern werden, in welchem man das Gleichartige in der universellen Materie erkennen und schliesslich messen lernen wird.

Die universellsten Gesichtspunkte in der Anwendung des Rotationsproblems ergeben sich, wo von der planetarischen oder gar der ganz allgemein gedachten kosmischen Mechanik die Stabilitätsvorstellungen oder die Ideen von dem mechanischen Charakter der Naturvergangenheit ins Auge gefasst werden. Was Laplace Himmelsmechanik nannte, war wesentlich nur planetarische Mechanik, und auch der Ausdruck „Weltsystem" muss in einem engeren Sinne genommen werden.

Die kosmische Mechanik bedeutet nicht bloss dem Umfange, sondern auch dem Wesen der Sache nach erheblich mehr, als eine mechanische Theorie des Sonnensystems. Allein dieser gewaltige Begriff, der in seinen Rahmen das Universum aufzunehmen hat, ist thatsächlich nur mit wenigen bestimmten Vorstellungen ausgefüllt.

Der mechanische Kosmos reicht so weit, als Materie und Bewegung wahrgenommen werden können oder vorausgesetzt werden müssen. Bei den bezüglichen Betrachtungen hat sich aber die Mechanik mit der Physik zu verbünden oder vielmehr zu einer mechanischen Physik zu verschmelzen.

28. Über das Verhältnis der Mechanik zur Physik bemerkt Dühring Folgendes*):

Dieses Verhältnis gestaltet sich mehr und mehr derartig, dass der rationelle Inhalt der Physik immer entschiedener als angewandte Mechanik sichtbar wird. Die Akustik ist derjenige Teil der Physik, welcher sich zuerst am nachdrücklichsten und unmittelbarsten zu einer Anschliessung an die mechanischen Prinzipien geeignet hat. Ja er steht nach einer gewissen Seite mit sehr wesentlichen Elementen seines Inhalts noch innerhalb der herkömmlichen Abgrenzungen der Mechanik

*) a. a. O. S. 469.

selbst; denn die Aërostatik und Aërodynamik oder überhaupt die Mechanik des Gasförmigen werden zum Umkreis der rein mechanischen Theorien gerechnet. Wenn aber die deduzierende Konsequenz aus mechanischen Prinzipien in der bestimmten Form eines durch Rechnung fortschreitenden Verfahrens thatsächlich irgendwo abbrechen muss und wenn auch die weniger bestimmte Schlussart, die auf das eigentliche Rechnen verzichtet, nicht überallhin zu reichen vermag, so ist der Grund dafür in dem Mangel an Ausbildung zu suchen, der an sehr wesentlichen rein mechanischen Theorien noch nicht gehoben worden ist.

Dieser angedeutete Mangel betrifft vor allen Dingen die Theorie der Bewegung in widerstehenden Mitteln. Von Lejeune-Dirichlet ist mit Bezug auf einen derartigen Vorgang nachgewiesen worden, dass bei der Bewegung eines festen Körpers in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit überhaupt nur durch Geschwindigkeitsänderungen hervorgerufen wird, während bei gleichbleibender Bewegung, wobei ein dynamischer Gleichgewichtszustand zwischen dem Bewegten und dem neuen erfüllenden Medium, dem Kraftfelde, vorauszusetzen ist, von einem Widerstande im gewöhnlichen Sinne überhaupt nicht die Rede sein kann. Die Widerstandsüberwindung beruht immer auf einer Kraftausgleichung, wobei auf der einen Seite eine Kraftabgabe, auf der anderen Seite eine Kraftaufnahme stattfindet, so dass hierbei von einem Ausgleich zwischen Selbstinduktion und Kapazität gesprochen werden kann und der Geschwindigkeitsverlust auf der einen Seite mit einem Geschwindigkeitsgewinn auf der anderen Seite zum Ausgleich kommen muss. In diesem Sinne wird auch in der Elektrizitätslehre der Widerstand als Geschwindigkeit definiert.

29. Die oszillatorische Bewegung oder Schwingung, die man für gewöhnlich als Wellenbewegung auffasst, bildet, wie E. Dühring*) bemerkt, die Grundform aller gegenseitigen Teilchenbeziehungen, die gewöhnlich als Störungen eines stabilen Gleichgewichtszustandes aufgefasst werden, wie schon oben angedeutet worden ist. Indem nun bei den Naturvorgängen die materielle Übertragung der mechanischen Wirkungen sich schliesslich immer auf kleine Schwingungen zurückführen lässt, so ist hier gelegentlich auf eine von Daniel Bernoulli herrührende Abhandlung hinzuweisen, welche von Dühring als der Ausgangspunkt für eine wichtige Vorstellungsart über die Zusammensetzung der Schwingungen bezeichnet wird. In dieser Abhandlung wird von Daniel Bernoulli die Mischung und das Übereinanderfallen oder das gleichzeitige Bestehen einfacher Schwingungen betrachtet und

*) a. a. O. S. 473.

daraus die allgemeineren Konsequenzen des schon von Taylor in Angriff genommenen Problems der vibrierenden Saiten gezogen. Er gelangte dadurch zu einer neuen Idee betreffs der Anschauung dieser Vorgänge, welche er ganz allgemein in einem Satze zum Ausdruck brachte, der rein mechanisch und abgesehen von allen Anwendungen für jedes System von Körpern, die unter wechselseitiger Einwirkung sich in einem Schwingungszustande befinden, Geltung haben soll. Diese neue Wahrheit der mechanischen Physik wurde am Schluss der bezeichneten Abhandlung dahin festgestellt: dass „in jedem System die gegenseitigen Bewegungen der Körper immer eine Mischung von einfachen, regelmässigen und permanenten Schwingungen verschiedener Art sind“.

Durch Fourier*) wurden die analytischen Auffassungsformen Bernoullis in mathematischer Beziehung ergänzt und in Folge der Bestätigung, welche durch die akustischen Experimentaluntersuchungen, sowie durch die Analyse des Klanges seit den von Georg Ohm gegebenen Anregungen gewonnen worden sind, wird die von Bernoulli ausgesprochene Idee als eine festgestellte Grundlage für weitere physikalische Schlussfolgerungen auf diesem Gebiete der mechanischen Physik angesehen.

Es ist hierbei jedoch ein Umstand nicht ausser acht zu lassen, auf welchen auch Dühring hinweist, nämlich der, dass im freien Kräftespiel ein Kraftpunkt zeitweis immer nur einer einzigen Bewegung unterliegen kann, die allerdings als die Resultante verschiedenartig wirkender Kräfte zum Vorschein kommen mag. Wenn beispielsweise in einem rotierenden Körper die einzelnen Massen- oder Kraftpunkte auch fortwährend ihre Bewegungsrichtung verändern, so muss doch nach dem Unabhängigkeitsprinzip angenommen werden, dass jeder dieser Punkte in einem unendlich kleinen, das heisst nicht mehr wahrnehmbaren und darum auch nicht messbaren Zeitteilchen sich abwechselnd in einer unendlich kleinen Tangentialstrecke und darauf in einer entsprechend kleinen Radialstrecke, das heisst in einer Wellenlinie bewegt, deren unendlich kleine Strecken sich polygonartig zusammenfügen und daher als eine kontinuierlich verlaufende Kurve darstellbar sind.

Dühring drückt dies folgendermassen aus**). „Der Gedanke einer Zusammensetzung selbständig vorhandener Bewegungen, von denen ein

*) Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones qui peuvent coexister dans un même système de corps; Histoire de l'académie de Berlin 1753.

**) a. a. O. S. 474.

und dasselbe Teilchen affiziert wird, kann, abgesehen von dem Spezialfall der kleinen Schwingungen, schon rein prinzipiell und im Hinblick auf das einfachste Schema der phoronomischen Kombination und der zugehörigen Kräftebeziehungen nur dann völlig exakt ausfallen, wenn man nicht die Bewegungserscheinungen, sondern die ihnen vorausgehenden Antriebe als Gegenstand der realen Komposition vorstellt. Hierzu kommt alsdann die Möglichkeit, eine einzige und einheitliche Bewegungserscheinung durch den blossen Akt der Auffassung zu zerlegen, indem man z. B. nur das näher ins Auge fasst, was einer bestimmten Koordinate oder überhaupt einem besonderen Gesichtspunkte entspricht. Es sind alsdann nicht zugleich mehrfache Bewegungserscheinungen vorhanden, sondern ein und derselbe reale Vorgang, der auf der Zusammensetzung der Antriebe zur Bewegung beruht und dem nur eine einzige an sich vorhandene, oder mit anderen Worten eine auf den allgemeinen Raum und das universelle System von mechanischen Örtern bezogene Bahn entspricht, lässt sich vermöge einer höchst interessanten Abstraktionskraft, die in unseren räumlichen Vorstellungen bethätigt werden kann, auch in irgend einem seiner natürlichen Bestandteile als besondere Bewegungserscheinung sichtbar machen. Durch diese Art von Übersetzung der realen Bewegungsantriebe in einseitige Konstruktionen von Bewegungserscheinungen kann die Täuschung veranlasst werden, als wenn die partiellen Bewegungsphänome nebeneinander und gleichzeitig in verschiedenen Bahnen zur Existenz gelangten. Der Widersinn, der das Ergebnis dieser Täuschung ist, kann jedoch nicht eintreten, so lange man sich bewusst bleibt, dass jene Trennung, auf welcher die besondere Partialvorstellung beruht, auf eine Teilauffassung und Teilkonstruktion des realen Gesamtvorganges zurückzuführen ist.“ —

Diese Auseinandersetzung und der von Dühring darangeknüpfte Hinweis auf ein von Huyghens bei der Behandlung der Stossgesetze benutztes Beispiel der Zusammensetzung und beziehungsweise Nullierung der Ortsveränderung bezüglich der Bewegung eines Schiffes und einer auf dem Schiffe fortschreitenden Person im Vergleich zu einem festen Punkt am Ufer liefert den Beweis, dass Dühring den Vorgang rein phoronomisch oder eigentlich rein geometrisch ins Auge gefasst hat, wodurch der tiefere Sinn, der sich auf die Änderung der mit der Bewegungsänderung verknüpften Änderung der Kraftwirkung bezieht, verloren geht. Diese mit der Bewegungsänderung verknüpfte Änderung der Kraftwirkung ist aber für unsere Betrachtungsweise gerade die Hauptsache, und die blosse Ortsveränderung ist für unsere Betrachtungen von keinerlei Bedeutung, wenn nicht dabei auf die zurückgelegte Kraftstrecke Bezug genommen wird.

Wir haben hier nur das freie Spiel der Kräfte im abstraktesten Sinne zu berücksichtigen und zwar unter der Annahme, dass dieses freie Kräftespiel sich in Schwingungen oder Rotationen vollzieht.

---

## Zweites Kapitel.

## Die atomistischen Theorien.

30. Die Physik kann nicht ohne gewisse Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Materie zu einer einheitlichen Anschauung der Naturvorgänge gelangen. Diese Voraussetzungen und Fundamentalbegriffe über das Substrat der Naturerscheinungen besitzen dieselbe Wichtigkeit, wie die allen Naturvorgängen gemeinsamen Gesetze, ja man würde zur Aufstellung dieser gemeinsamen Gesetze gar nicht ohne gewisse Voraussetzungen über die Konstitution der Materie gelangen können. Diese Voraussetzungen oder Hypothesen werden durch die Induktion vorbereitet, wobei die induktive Methode sich zweier wesentlich von einander verschiedener Verfahrungsweisen bedient. Erstens sucht sie durch eine mannigfach wechselnde Benutznng der analytischen und synthetischen Methode die Deutung der Thatsachen möglichst zu beschränken. Zweitens nimmt sie eine einzelne Deutung, welche die Möglichkeit für sich hat, hypothetisch als wirklich geltend an, um die daraus sich ergebenden Folgerungen zu entwickeln und an der Erfahrung zu prüfen*).

Die Hypothesen sind für die Erklärung der Naturerscheinungen unentbehrlich, jedoch soll man darin immer nur logische Hilfsmittel erblicken, durch welche die Ausfüllung der vielfachen Lücken, welche in der Verbindung der thatsächlichen Erfahrungen hervortreten, ermöglicht wird. Es folgt daraus, dass die Hypothesen, auf welche die Naturanschauung sich stützt, nach den Erfahrungen zu gestalten, beziehungsweise umzugestalten sind. Immer ist dabei an dem Grundsatze fest zu halten, dass die Hypothese einzig und allein dazu dienen soll, den logischen Zusammenhang der Naturerscheinungen zu vermitteln. Jede Hypothese hat sich also auf die Voraussetzungen zu beschränken, welche zur Herstellung dieses logischen Zusammenhanges der Naturerscheinungen notwendig sind, so dass nichts Überflüssiges in der Hypothese Platz findet.

*) W. Wundt, „Methodenlehre“. 1. Aufl. S 22.

Zwei Hypothesen sind bezüglich der Konstitution der Materie aufgestellt worden und in den Anschauungen der Physiker bestehen dieselben heutigen Tages zum Teil noch nebeneinander. Die eine dieser Hypothesen bezieht sich auf die raumerfüllende oder, wie man auch sagen könnte, raumnegierende Eigenschaft der Körperwelt und legt den kontinuierlichen Zusammenhang des Raumes auch der Materie bei. Es ist dies die sogenannte Kontinuitätshypothese, welche starre Massensysteme voraussetzt. Die andere Hypothese beruht auf der Vorstellung der Zusammensetzung der Materie aus selbständigen Teilchen und daher spricht man von einer atomistischen Hypothese oder Atomistik.

Auf die Kontinuitätshypothese begründen sich die Laplaceschen Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles, die Arbeiten von Navier und Poisson über die Theorie der Elastizität, sowie die Fouriersche Theorie der Wärme.

Durch die neueren Erfahrungen über das Wesen der Naturvorgänge ist die Kontinuitätshypothese in den Hintergrund gedrängt worden und die Atomistik zur allgemeineren Anerkennung gelangt, indem durch dieselbe der anschaulichen Gestaltung dieser Vorgänge Rechnung getragen wird und die allgemeinen Prinzipien der Mechanik insbesondere mit Rücksicht auf Kraftübertragung durch Stosswirkung zur Geltung gelangen. Die Kontinuitätshypothese beruht auf Statik und zieht die statischen Fernewirkungen in Betracht. Die Atomistik ist Dynamik.

Die dynamiche Zusammensetzung der Körper wurde in einfachster Weise von dem berühmten Jesuitenpater P. Boscovich entwickelt; derselbe knüpfte an einen Gedanken Newtons an, wonach alle terrestrischen Erscheinungen dem Spiel abwechselnd wirksam werdender Anziehungen und Abstossungen zwischen den kleinsten Teilchen der Materie zugeschrieben werden. Hiermit wurde die Voraussetzung vollkommen starrer Körper und zeitlos sich vollziehender Kraftwirkungen aus der Mechanik verbannt. Im kühnen, konsequenten Gedankengange gelangte Boscovich zu der Ansicht, dass die letzten Teilchen der Materie unendlich kleine Kraftpunkte sind, welche das Wirkungszentrum der anziehenden und abstossenden Kräfte bilden. Ob diese Kräfte in den gedachten Punkten oder ausserhalb derselben ihren Sitz haben, lässt er unentschieden*).

Diese Idee hatte Boscovich möglicherweise aus dem Leibnizschen Monadensystem geschöpft, doch fand er sie in dem von Leibniz angenommenen Zusammenhange ähnlicher Elemente und deren endlicher

*) Das Hauptwerk Boscovichs erschien 1763 in Venedig unter dem Titel: „Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium“.

Zahl. Unter den Anhängern dieser atomistischen Theorie ist Michael Faraday wohl der hervorragendste. Boscovich selbst giebt an, dass er durch die kritische Prüfung der Schriften über den Streit der Bedeutung der lebendigen Kräfte oder gewisser anderer in das Spiel tretender und den Körpern momentane, unendliche Geschwindigkeiten mitteilender Kräfte, wie solche bei dem Stoss wirksam werden, darauf gekommen sei. Er gelangte zu der Ansicht, dass solche Kraftwirkungen nicht möglich wären, denn abgesehen davon, dass diese Kräfte im Verhältnis zur Schwere oder zum Federdruck u. s. w. eine unendlich grosse Intensität besitzen müssten und dass eine derartige Wirkungsweise dem absolut gültigen Gesetz des Zusammenhanges aller Dinge widerspräche, so würde daraus folgen müssen, dass dieselbe Grösse in einem und demselben Zeitpunkte zwei verschiedene Werte hätte.

Aus dieser Betrachtung, welche er mit den am klarsten erkannten Thatsachen der Naturvorgänge in voller Übereinstimmung fand, zog Boscovich den Schluss, dass die Berührung zwischen zwei Atomen oder materiellen Elementen eine Unmöglichkeit sei; denn wenn diese Elemente gegeneinanderstossen, so rufen sie entweder in den Geschwindigkeiten ihrer ganzen Massen Veränderungen hervor, wenn sie hart sind, oder die Veränderungen finden wenigstens an den Oberflächen statt, wenn sie weich oder elastisch sind; will man diesen Elementen aber gleichzeitig Elastizität und Berührung zuschreiben, wie dies Johann Bernoulli gethan hat, so geht man nur der logischen Schwierigkeit aus dem Wege, ohne sie zu beseitigen. Die Geschwindigkeitsänderungen, welche diese Elemente einander mitteilen, sind also, wie Boscovich meint, dem Umstande zuzuschreiben, dass die Abstossungskraft zwischen den Atomen unendlich wächst, wenn die Entfernung sich vermindert, und diese Änderungen müssen sich ohne Kontakt vollziehen. Er kommt dabei zu dem Schluss, dass die materiellen Elemente an und für sich keine Ausdehnung haben.

31. Das allgemeine Gesetz des gegenseitigen Zusammenhanges der materiellen Elemente mit Bezug auf die molekularen Bewegungen und Bewegungsänderungen ist von jeher auf Berührung und Stosswirkung begründet worden. Nach den von Descartes in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts angestellten aber keineswegs erfolgreichen Versuchen, die wahren Gesetze der Bewegungsmitteilung ausfindig zu machen, wurde von der Londoner Royal Society ein Preis zur Lösung der Aufgabe ausgesetzt. Drei der eingesendeten Arbeiten wurden gekrönt; dieselben waren von Huyghens, Wren und Wallis verfasst und damit schien die Sache erledigt zu sein, obschon Wallis für den Stoss harter Körper eine andere Theorie als seine beiden Konkurrenten

aufgestellt hatte, welche überhaupt keine absolut harten, sondern nur elastische Körper anerkannten.

Euler bemühte sich noch in der Mitte des 18. Jahrhunderts, alle Kraftwirkungen auf die Undurchdringlichkeit oder die absolute Härte der Atome zurückzuführen, und bekannte sich zur Ansicht der alten griechischen Philosophen, indem er diese harten Atome als die unerschöpfliche Quelle der Kräfte betrachtete.

Durch Newtons Entdeckung des Gravitationsgesetzes, sowie durch zahlreiche eingehende Beobachtungen der Naturvorgänge wurde aber eine andere Theorie zur Geltung gebracht, welche davon ausging, dass die Kräfte nicht momentan unendliche Geschwindigkeiten, sondern nur geometrisch sich zusammensetzende Beschleunigungen erzeugen und auf die in dieser Weise allmählich anwachsende Geschwindigkeit ist, nach der neueren Anschauung, auch die Stosswirkung zurückgeführt worden.

Es stimmt mit allen in den Naturvorgängen beobachteten Thatsachen vollständig überein, wenn man annimmt, dass die Beschleunigungen oder die damit identifizierten Kräfte in jedem Augenblicke von dem vorhandenen statischen Zustande, das heisst: von den relativen Lagen und gegenseitigen Entfernungen der Massen oder Massenteilchen abhängig sind und dass die Vorgänge sich derartig vollziehen, als wenn die Körperelemente in den kleinsten Entfernungen sich gegenseitig mit grosser Stärke abstossen, wogegen sie aus grösseren Entfernungen auf einander anziehend einwirken. Erfahrungsmässig regeln sich diese letzteren Einwirkungen bei dem Vorhandensein grösserer Entfernungen nach dem Gravitationsgesetze.

Die inneren Pressungen und Spannungen (stress and strains), welche in den Massen durch die Einwirkung äusserer Kräfte hervorgerufen werden, sind schon seit langer Zeit, zuerst eingehender wohl von Huyghens, mit Bezug auf Flüssigkeiten in Betracht gezogen worden.

Von Cauchy, Poisson und Lamé wurden bezügliche Theorien auch für feste Körper aufgestellt. Es werden diese Wirkungen ebenfalls anziehenden und abstossenden Kräften zugeschrieben, welche in unmessbar kleinen Entfernungen zwischen den Flächen der parallelepipedisch gedachten Massenelemente thätig sind. Die Komponenten dieser Pressungen und Spannungen nach irgend welchen Richtungen werden als die algebraischen Summen dieser sich zerlegenden oder in diesen Richtungen ausstrahlenden Kräfte gedacht.

Poisson und Cauchy haben diese Pressungen und ihre Komponenten sowohl in normaler als auch in tangentialer Richtung zu den Flächenelementen isotroper Körper berechnet, wobei sie bei der Distanzfunktion zweier gegenseitig auf einander einwirkender Moleküle eine

ganz unbestimmte Form annahmen, die, in Übereinstimmung mit den Thatsachen auf die notwendig erscheinenden Elemente beschränkt war. Sie kamen dadurch zur Feststellung der folgenden drei Punkte:

1. Die inneren Pressungen der Körper, selbst der festen, werden nur parallele Komponenten zu den Flächen haben, auf welche sie einwirken, oder sie werden in den ruhenden Flüssigkeiten beständig normal bleiben, welche Gleitungen der zu den beeinflussten Flächen parallelen Schichten auch vorkommen.

2. Diese Pressungen ändern sich in Übereinstimmung mit den zweiten Potenzen der Dichtigkeiten.

3. Hieraus folgt, dass, wenn Körper sich in dem sogenannten natürlichen Zustande befinden, wo ihr Massensystem als ein freies betrachtet werden kann und die Pressung durchaus Null ist, diese Pressung Null bleibt, welche Zusammenpressungen auch darauf ausgeübt werden mögen, so dass diese Kompressionen sich unendlich ohne Widerstand unter der Wirkung des kleinsten Zwanges vollziehen.

Es ergiebt sich daraus die Unmöglichkeit, dass die Körper, mögen sie fest, flüssig oder gasförmig sein, ja dass der Äther selbst aus einer kontinuierlichen Materie bestehe.

Die von Navier schon 1821 und dann von Poisson und Cauchy 1828 aufgestellten Formeln beruhen auf der allgemein anerkannten Voraussetzung, dass die gegenseitige Wirkung zweier Teilchen in jedem Zeitpunkte als Funktion einer einzigen Raum- oder Kraftstrecke auftritt und zwar als Funktion derjenigen Kraftstrecke, durch welche die Teilchen von einander getrennt sind.

Das Studium der elektrischen Erscheinungen hat neuerdings einen tieferen Einblick in das Wesen der Kräfte gewährt.

32. Wir knüpfen an die vorhergehenden Auseinandersetzungen einige Betrachtungen, welche von Oliver Heavyside in seiner elektrodynamischen Theorie bezüglich der Wirkungsweise der Kräfte im Universum angestellt worden sind*).

Die Gesetze, durch welche Bewegungen oder Erscheinungen, die zuletzt von Bewegungen hervorgerufen werden, eine Umwandelung erfahren, bilden natürlich einen wichtigen Gegenstand der physikalischen Studien. Betreffs derartiger Vorgänge bestehen zweierlei Ansichten. So hat man eine Theorie der augenblicklichen Wirkung in die Ferne zwischen zwei verschiedenen Körpern ohne ein übertragendes Zwischenmittel aufgestellt, und anderseits hat man eine Theorie der zeitlichen Fortpflanzung der Kraftwirkung durch die Mitwirkung eines Zwischenmittels als naturgemässer anerkannt. Im letzteren Falle üben die von

*) The Electrician, 30. Dezember 1892, p. 239.

einander entfernten Körper nur scheinbar eine direkte Wirkung auf einander aus, denn sie wirken direkt nur auf das Zwischenmittel oder Medium ein, wobei sich die Wirkungen durch den Zusammenhang der Teilchen des Mediums allmählich im längeren oder kürzeren Zeitverlauf fortpflanzen. Im ersten Falle ist die Idee eines Mediums überhaupt nicht vorhanden.

Diese letztere Anschauung kann jedoch etwas modifiziert werden, indem man annimmt, dass die Wirkung, obgleich sie scheinbar augenblicklich stattfindet, doch unter Mitbeteiligung eines Mediums sich vollziehe, wobei aber vorausgesetzt wird, dass die Übertragungsgeschwindigkeit, in Folge der Kürze des dazu erforderlichen Zeitverlaufs, nicht mehr messbar ist. Auf diese Weise können die beiden Hypothesen der unmittelbaren und der mittelbaren Wirkung in eine gewisse Übereinstimmung gebracht werden und nebeneinander zur Erklärung der Naturvorgänge zur Geltung kommen, indem man die Hypothese der unmittelbaren, mit scheinbar zeitloser Übertragung stattfindenden Kraftwirkung als einen Grenzfall betrachtet.

Wenn man zum Beispiel in Erfahrung gebracht hat, dass bei der Kraftübertragung ein wirksames Zwischenmittel sich bethätigt und eine messbare Geschwindigkeit der Übertragung stattfindet, dass aber in einem gewissen Falle der Einfluss des Zwischenmittels unbemerkbar wird, so kann man für diesen Fall annehmen, dass die scheinbar unendlich gross auftretende Fortpflanzungsgeschwindigkeit eben nur relativ unendlich gross sei, prinzipiell aber sich in einem endlichen, wenn auch unmessbar kleinen Zeitverlaufe vollziehe. Es kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn wirklich eine momentane Kraftübertragung stattfände, aber die beiden Hypothesen können doch jetzt nebeneinander bestehen.

Wir betrachten nun die Fortpflanzung des Schalles. Der Schall besteht in physikalischer Hinsicht aus schwingenden Bewegungen materieller Teilchen und wird durch Wellenbewegung übertragen, welche in der Luft und in den darin eingetauchten Körpern sich fortpflanzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft ist sehr gering, so dass sie schon in früherer Zeit ohne besondere Beobachtungsinstrumente wahrgenommen werden konnte. Wir nehmen jedoch an, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft sei vielmal grösser, so dass von einer endlichen Geschwindigkeit und überhaupt von einer Geschwindigkeit nicht mehr die Rede sein könnte. Wir würden in der Hauptsache die Erscheinung wahrnehmen, dass materielle Körper nach gewissen Gesetzen schwingen können und dass sie ausserdem davon entfernte Körper in Schwingungen zu setzen vermögen. Es

würde dies die Induktion der Schwingungen sein, welche sich in Ermangelung besserer Kenntnis durch die Fernewirkung von Körpern auf Körper, oder von Materie auf Materie erklären liesse, welche Wirkung sich schliesslich dann dem Gesetz des umgekehrten Quadrats unterordnen lassen würde, nicht weil man dabei an irgend eine akustische Wirkung dächte, sondern weil die Eigenschaften des Raumes zu dieser Annahme drängten. Ferner würden wir natürlich die Entstehung des Schalles immer den von Luft umgebenen Körpern zuschreiben, aber niemals der Luft selbst, deren Vorhandensein in dieser Theorie gar keine Berücksichtigung fände. Irgend ein scharfsinniger Philosoph könnte wohl dabei auf den Gedanken kommen, die Erscheinung durch ein mitwirkendes Medium zu erklären, aber seine Ansicht würde nicht sofort Zustimmung finden, wenn auch derselbe das Vorhandensein des Mediums physiologisch und mechanisch klarlegen und die Übereinstimmung der wesentlichen Eigenschaften nachweisen würde. Nur durch den thatsächlichen Nachweis der endlichen Geschwindigkeit des Schalles würde das Vorurteil beseitigt werden können.

Wenn nun auch unzweifelhaft im Einzelnen ein grosser Unterschied zwischen der Übertragung des Schalles und der elektrischen Störungen vorhanden ist, so findet doch auch wiederum genug Ähnlichkeit statt, um den vorher angenommenen Fall mit dem wirklich stattfindenden elektromagnetischen Vorgange in Vergleich stellen zu können. Man hatte Leiter und Nichtleiter oder Isolatoren angenommen, und da die endliche Geschwindigkeit der Fortpflanzung im nichtleitenden Raume ausserhalb der Leiter unbekannt war, so fasste man eben nur die Leiter ins Auge und nahm eine Flüssigkeit an, welche auf oder in den Leitern vorhanden sein und um oder durch dieselben sich bewegen sollte. Dabei wurde die Influenzierung entfernter Leiter der augenblicklichen Fernewirkung zugeschrieben und von einem Zwischenmedium ganz abgesehen. Wenn nun wiederum ein scharfsinniger Philosoph mit einer Theorie zur Erklärung dieser Wirkungen unter Annahme der vermittelnden Wirkung eines mit endlicher Geschwindigkeit arbeitenden Zwischenmediums aufgetreten wäre, so würde derselbe gegenüber der üblichen Anschauung wenig Anklang gefunden haben, selbst wenn er auch auf die bereits vorhandene Annahme der Übertragung der Lichtwellen durch den Äther hingewiesen und hervorgehoben hätte, dass nach seiner elektromagnetischen Lichttheorie die Erscheinungen weit besser erklärt werden könnten, als nach der bisher üblichen Annahme. Alte Ansichten sind eben durch neue Anschauungen, selbst wenn diese grössere Wahrscheinlichkeit für sich haben, nur schwer zu überwinden. Wert und Gültigkeit des Beweises haben je nach der geistigen Kapazität

des Beurteilers verschiedenes Gewicht. Diejenigen, welche in Maxwells Theorie eingedrungen sind, werden den Beweis für überzeugend halten; Andere werden nicht daran glauben. Jedenfalls würde die alte Ansicht noch lange Zeit die herrschende geblieben sein, wenn nicht ein direkter Beweis für die endliche Geschwindigkeit erzielt worden wäre. Es war einfach eine Frage der Zeit. Aber der direkte Beweis der endlichen Geschwindigkeit war geführt worden und der langsame Einfluss theoretischer Schlussfolgerungen auf konservative Gemüter wurde verstärkt durch den Hinweis auf die Thatsachen.

Es gilt nun für unzweifelhaft, dass elektromagnetische Wellen ebenso wie die an der Oberfläche schwingender Körper fortgepflanzten Schallwellen an der Oberfläche der Leiter sich fortpflanzen. Es gilt nun für eine gerechtfertigte wissenschaftliche Schlussfolgerung, dass dies in dem einen wie in dem anderen Falle durch ein Medium geschieht, und es ist ein direkter Beweis für das Vorhandensein beider Medien gewonnen. Das Medium für die Schallübertragung ist die Luft; das Medium für die Übertragung elektrischer Störungen ist der Äther. Es ist nun auch äusserst wahrscheinlich, dass die Lichtschwingungen an sich nichts anderes sind als sehr rasche elektromagnetische Schwingungen. Man wird daran kaum zweifeln können, auch wenn die Lücke zwischen den Hertzschen und den Lichtschwingungen noch nicht ausgefüllt ist, weil noch eine geeignete Methode dazu fehlt — abgesehen von einer neuen, zur Zeit nicht denkbaren Entdeckung, wodurch die angenommene Möglichkeit widerlegt würde.

Mit diesen Anschauungen des geistreichen Analytikers werden die Schwierigkeiten gekennzeichnet, mit denen neue, wenn auch noch so gerechtfertigte Anschauungen gegenüber den schulmässigen Ansichten sich Bahn brechen.

33. Durch die Aufstellung der mechanischen Wärmetheorie ist die ältere Hypothese bezüglich einer Fernewirkung der Körper und Massenelemente ganz in den Hintergrund gedrängt worden und nur noch eine kleine Anzahl von Physikern der alten Schule mag gewohnheitsmässig an dieser Anschauung, bei der man sich eben nichts denkt, festhalten. Während man früher das Ausdehnungsbestreben der Gase unter der Annahme rein statischer Kraftverhältnisse betrachtet und angenommen hatte, dass die Ursache des Vorganges in einem Übergewicht der atomistischen Abstossungskräfte gegenüber den Anziehungskräften läge, sah man sich durch die Auffassung der Wärmeerscheinung als atomistischen oder molekularen Bewegungszustand veranlasst, auch die Spannung und Ausdehnung der Gase durch die fast als unbeschränkt angesehene Beweglichkeit der Moleküle der gasförmigen Substanzen zu

erklären. Im konsequenten Weiterschliessen sah man sich nun genötigt, die in diesem Falle durch molekulare Bewegung, und zwar durch Annahme von Schwingungen ersetzte statische Abstossungskraft überhaupt als eine unwahrscheinliche, durch keine anschauliche Betrachtungsweise gestützte Hypothese zu verwerfen und somit alle ähnlichen Naturvorgänge auf molekulare Schwingungen und die damit verbundenen Stosswirkungen zurückzuführen. Indem durch diese neue, sehr natürlich erscheinende Betrachtungsweise das Prinzip der Fernewirkung bezüglich der früher angenommenen Abstossungskräfte beseitigt worden war, war auch die Annahme der Anziehungskräfte hinfällig geworden. So gelangte man dazu, nicht bloss für Elektrizität und Magnetismus, für welche die engen Beziehungen zu Wärme und Licht die Vorstellung des molekularen Schwingungszustandes nahelegten, sondern auch für die Erklärung der Wirkungen der Gravitation und Schwere die älteren Hypothesen der Kontaktwirkung wieder zur Geltung kommen zu lassen. Wenn auch bei dieser Annahme, abgesehen von den Unvollkommenheiten der einzelnen hierbei aufgestellten Hypothesen, der Nachweis einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitationswirkung noch mangelte, wodurch der entscheidende Beweis zu führen sein würde, so muss man doch zugeben, dass, sobald nur erst die verschiedenen Molekularkräfte den Gesichtspunkten der mechanischen Wärmetheorie vollständig unterworfen worden sind, unzweifelhaft auch die Gravitation, beziehungsweise die Schwerkraft, von demselben Standpunkte aus beurteilt werden muss.

Mit der Beseitigung der metaphysischen Voraussetzung der durch den leeren Raum geisterhaft wirksamen Kräfte ist hinsichtlich der begriffsmässigen Auffassung der Konstitution der Materie der Anschaulichkeit in möglichster Weise Rechnung getragen, denn durch die Annahme der molekularen Stosswirkungen als Kraftübertragungsmittel wird der Zusammenhang der im Universum wirksamen Kräfte hergestellt und der Raum als ein Kraftfeld, der bei der Bewegung zurückgelegte Weg als eine Kraftstrecke in Betracht gezogen, wie dies auf Grund der neueren Erfahrungen im Gebiete der Naturvorgänge verlangt werden muss. Der Äther erscheint dabei als das feinste, schwingungsbefähigtste und die Stossübertragung in die grössten Fernen bewirkende Medium, welches bei allen Naturvorgängen die Hauptrolle spielt und die Körperwelt, die einst durch Ballungsakte aus dem scheinbar leeren Weltraum heraus auf unerklärliche Weise geschaffen worden ist, in ihrem Bestande zusammenhält. Infolge dieser Anschauung sind die neueren Äthertheorien von besonderer Wichtigkeit.

34. Die dynamische Theorie des Äthers, als des kraftübertragenden Mediums, hat neuerdings die hervorragendsten Naturforscher vielfach

beschäftigt. Mit Bezug hierauf ist vor kurzem der Londoner Royal Society eine umfassende und höchst interessante Abhandlung über die Theorie des Äthers von J. Larmor vorgelegt worden, auf welche im Folgenden eingegangen wird. Diese Theorie ist besonders für die Elektrizitätslehre von Wichtigkeit*).

Obwohl das Vorhandensein des Äthers von den heutigen Physikern allgemein anerkannt wird, so ist es doch unmöglich, vom Standpunkte unserer heutigen Naturerkenntnis die Frage bestimmt zu beantworten: Was ist der Äther? — Immerhin hat man in die Natur des Äthers schon tiefe Einblicke gewonnen, worauf sich die Hoffnung begründen lässt, dass man nach und nach zur vollen Klarheit gelangen werde.

Prof. Lodge weist im Vorwort zu seinem Werke: „Die modernen Theorien der Elektrizität“ darauf hin, dass wohl im nächsten Jahrhundert das Rätsel des Äthers seine Lösung finden werde, und er deutet selbst den Weg zu dieser Lösung an, indem er die folgende Ansicht ausspricht:

„Wenn man sich eine vollkommene, zusammenhängende, unzusammendrückbare, den ganzen Weltraum erfüllende Flüssigkeit denken könnte, welche alle Funktionen des Äthers erfüllt; wenn dieses Medium im besonderen das Licht übertragen, sowie die elektrischen und magnetischen Erscheinungen, welche nicht von dem Vorhandensein der Materie abhängig sind, hervorbringen könnte und wenn der so gedachte Bewegungszustand dieses Mediums möglich und stabil wäre, so würde die Theorie des Äthers begründet sein.

„Nachdem so die Theorie aufgestellt wäre, würde die Theorie der Materie folgen können und man würde sie dann auf die optischen und elektrischen Erscheinungen, sowie auf die Wirkungen der Kohäsion und der Gravitation anwenden können. Alsdann würde man die Frage nach den spezifischen Unterschieden zwischen den Elementen und deren Verbindungen zu beantworten vermögen. Ist dies einmal erreicht, so lässt sich die ganze Chemie auf ein einfaches Gesetz zurückführen.“ —

Das Vorhandensein und die Wirkungsweise des Äthers wird hierdurch zu einem der wichtigsten Gegenstände naturwissenschaftlicher Forschungen gestempelt.

Ohne die von Lagrange am Ende des vorigen Jahrhunderts erdachte dynamische Methode würde (nach Larmors Ansicht) ein Eindringen in die geheimnisvolle Natur des Äthers überhaupt unmöglich sein. Diese Methode gestattet die Gleichungen des primordialen Mediums, welches bei allen betreffenden Erscheinungen vorausgesetzt wird, hinzuschreiben, ohne dass man eine Vorstellung von dem Mechanismus dieser

*) Nach J. Blondin in „La Lumière électrique“, 26. Mai 1894.

Bewegungen zu haben braucht. Somit reduziert sich alles auf die Kenntnis einer analytischen Funktion, welche die Verteilung der Energie in dem Medium als Funktion der Parameter oder der den Messungsmethoden zugängigen Grössen und ihrer Ableitungen im Verhältnis zur Zeit hinstellt.

Der erste Teil einer dynamischen Theorie des Äthers besteht daher in der Bestimmung dieser Funktion. Wenn dies gelungen ist, so ist auch die Möglichkeit einer mechanischen Erklärung bewiesen. Mit Bezug hierauf hat man die Eigenschaften zu untersuchen, welche man dem Äther beilegen muss, damit derselbe in seinem Kräftespiel den Gesetzen in einfacher und genauer Weise Rechnung trägt, nach denen sich die sinnlich wahrnehmbaren Erscheinungen vollziehen.

Unzweifelhaft besitzt der erste Teil der Aufgabe die grösste Wichtigkeit. Es ist dies der Teil, dessen Lösung Maxwell in seinem berühmten Werke über die Elektrodynamik versucht hat. Der zweite Teil ist eine Art Illustration des ersten Teiles, indem darin der Zweck verfolgt wird, die direkt unwahrnehmbaren Eigenschaften des Äthers durch einen Mechanismus zu erklären, wie wir denselben in materiellen Systemen beobachten können.

Die exakten Spekulationen bezüglich dieses letzten Teiles der Aufgabe sind William Thomson (Lord Kelvin) znzuschreiben. Die früher angestellten Versuche beruhen auf der Voraussetzung von Kräften, welche durch den leeren Raum zwischen den letzten Elementen der Äthermoleküle wirksam sind, eine Voraussetzung, welche gegenwärtig nicht mehr zulässig erscheint; ebensowenig kann dies aber der Fall sein bezüglich der Spekulationen der griechischen Philosophen und der Cartesianischen Schule, welche rein beschreibend und phantastisch sind und jeder soliden Grundlage entbehren.

Mit der berühmten Wirbeltheorie W. Thomsons beginnt eine Reihe fruchtbarer Arbeiten über die Konstitution der Materie und des Äthers. Man weiss, dass nach dieser Theorie, welche eine Vorgängerin in der einfachen Atomistik Boscovichs hat, die materiellen Atome aus kreisförmigen Wirbeln eines homogenen Fluidums bestehen, welches strukturlos und ohne Reibung sein soll, und dass die Kräfte zwischen den Atomen, welche die Basis anderer Molekulartheorien bilden, in Wirkungen bestehen, welche diese Wirbel in Folge der Trägheit des sie bildenden Fluidums auf einander ausüben, welche Wirkungen sich momentan übertragen müssen, wenn die Flüssigkeit absolut unzusammendrückbar ist, was aber in Wirklichkeit nicht der Fall sein kann.

Durch das Vorhandensein der Strahlungen, welche eine wichtige Rolle in den Naturvorgängen spielen, und durch die Eigenschaft der

Fortpflanzung mit endlicher, wenn auch sehr grosser Geschwindigkeit, welche diesen Strahlungen zukommt, wird man genötigt, ein Medium vorauszusetzen, welches dieser Fortpflanzung einen gewissen Widerstand der Deformation entgegensetzt, welcher Widerstand ähnlich demjenigen ist, den man bei den gewöhnlichen elastischen, relativ aber unzusammendrückbaren Körpern, wie Glas, Kautschuk, Gallerte, beobachten und studieren kann. W. Thomson ist es geglückt, diese Elastizität im Spiel der Trägheit des Fluidums, worin die Wirbelbewegungen stattfinden sollen, zu erklären; dies ist durch seine gyrostatische Theorie geschehen.

Bei alledem besteht aber noch eine Schwierigkeit, welche nur erst in unvollkommener Weise überwunden worden ist. Da man sich gezwungen sieht, zur Erklärung der Fortpflanzung transversaler Schwingungen mit endlicher Geschwindigkeit einen Widerstand durch Deformation in derselben Weise anzunehmen, wie dies der Fall bei fester Materie ist, so bleibt es unerklärlich, wie die Himmelskörper sich durch das die Lichtstrahlen der Gestirne übertragende Medium scheinbar widerstandslos bewegen können*). W. Thomson hat versucht, das Nichtvorhandensein dieses Widerstandes gegen die Bewegung der Himmelskörper mit dem Vorhandensein einer Elastizität, die ähnlich der Elastizität fester Körper ist, durch die Voraussetzung in Übereinstimmung zu bringen, dass diese Elastizität nur bei einer rotierenden Bewegung der Elemente des Mediums in das Spiel eintritt. Seitens Larmors wird angenommen, dass diese scheinbar mit einander in Widerspruch stehenden Eigenschaften sich in Übereinstimmung bringen lassen und dass in Wirklichkeit ihr Nebeneinanderbestehen oder vielmehr ihr Zusammenfallen zur Erklärung einer Klasse sehr wichtiger Erscheinungen sogar absolut notwendig ist**).

35. In hohem Grade haben die optischen Theorien zur Entwickelung der Ideen über die Natur und Bildungsart des Lichtäthers beigetragen. Den ersten Anstoss dazu gaben die Untersuchungen, welche zu Anfang dieses Jahrhunderts von Thomas Young über die wirkliche Natur des Lichts ausgeführt worden sind. Das Geheimnis der mathematischen Gesetze, nach denen die Lichterscheinungen bezüglich der Fortpflanzung, der Reflexion und Refraktion sich regeln, wurde bald darauf durch das Genie Fresnels entschleiert. Aber die

*) Von Encke ist bezüglich der Kometenbahnen ein derartiger Widerstand nachgewiesen worden.

**) Diesen Gegenstand hat Brillouin in den „Annales de Chimie et Physique", Oktober 1898, behandelt. Schon früher hat aber Lejeune-Dirichlet ein derartiges Prinzip aufgestellt. Monatsberichte der Berliner Akademie für 1852.

mathematische Begründung, welche Fresnel bezüglich seiner rasch auf einander folgenden Entdeckungen ausführte, ist sehr schwierig zu verfolgen und es scheint derselben der dynamische Zusammenhang zu mangeln. Je eingehender indessen die Lichterscheinungen studiert worden sind, um so mehr ist die Genauigkeit der Gesamtheit der Fresnelschen Formeln bestätigt worden.

Gegen das Jahr 1825 haben die Hauptmathematiker der Epoche — Augustin Cauchy in Frankreich, Franz Neumann in Deutschland, George Green in England und Mac Cullagh in Irland — die von Fresnel dargelegten Gesetze zu erklären und durch ihre eigenen Untersuchungen, sowie durch diejenigen von Brewster zu bestätigen versucht. Alle versuchten die Aufgabe in der Weise zu lösen, dass sie sich auf die Analogie der Lichtwellen mit den durch eine Störung in einem Teile einer festen elastischen Substanz hervorgebrachten Bewegungen stützten.

Die Arbeit von Cauchy ist die älteste; sie ist etwas empirisch und lässt zu wünschen übrig, wenn man die neuerdings über die Elastizität fester Körper gewonnenen Kenntnisse in Betracht zieht. Die Arbeit Neumanns ist originell und beruht auf festen Grundlagen, wenn man ein für alle mal von der vollständigen Theorie der Elastizität diejenige von Navier und Poisson in Abzug bringt. Was die Arbeit von Green anbelangt, so setzt dieselbe bei aller Allgemeinheit und Einfachheit, welche man in einer abgeschlossenen Theorie erwarten kann, die Grundlagen, auf denen eine Theorie der Elastizität materieller Körper aufzubauen ist, voraus.

Alle drei genannten Forscher haben die Aufgabe der Reflexion und Refraktion der Wellen studiert. Cauchy kann sich logisch mit den Fresnelschen Formeln nicht abfinden. Neumann gebührt das Verdienst, zur scharfen Einsicht in die Bedingungen gelangt zu sein, welche mittels der Theorie fester Körper, auf welche man sich stützt, nicht zu erfüllen sind. Indem er eine vollkommene Kontinuität des Mediums annimmt, welches das Licht fortpflanzt und die Kontinuität der Kraftübertragung bei der Durchdringung der Trennungsfläche der beiden materiellen Medien voraussetzt, gelangt er zu einer mit den Fresnelschen Gesetzen übereinstimmenden Lösung, welche sich auch auf den komplizierteren Fall der krystallinischen Reflexion ausdehnen lässt. Zugleich sah er sich aber auch zu der Annahme genötigt, dass der Äther dieselbe Dichtigkeit in allen Körpern hat und dass die Richtung der Verschiebung in einem polarisierten Strahl in der Ebene der Polarisation liegt, welche Voraussetzungen sich mit den von Fresnel aufgestellten in Widerspruch befinden.

Mac Cullagh wurde durch die Vorliebe für einfache und elegante geometrische Konstruktionen auf die Untersuchung physikalisch-optischer Aufgaben geführt, wobei er suchte die geometrischen Grundsätze zu entdecken, auf welche die Fresnelschen Gesetze sich ableiten liessen, um dadurch auf leichte Weise dieselben auf den allgemeinsten Fall auszudehnen. Er nahm die Kontinuität des Mediums an, welches er geometrisch in Anwendung brachte, indem er davon ausging, dass die Verschiebung in den gebrochenen Wellen gleich der Resultante der Verschiebungen zwischen den einfallenden und reflektierten Wellen ist. Er setzte ferner die konstante Dichtigkeit des Äthers in allen Körpern voraus, und wurde durch Betrachtungen geometrischer Symmetrie darauf geführt, die Schwingung als in der Polarisationsebene vor sich gehend anzusehen. Da noch eine letzte Hypothese nötig erschien, so nahm er zuvor noch an, dass gewisse von Cauchy in Betracht gezogene Pressungen gleichwertig seien. Er gewann so eine mit Brewsters Ausführungen genügend übereinstimmende Erklärung über die krystallinische Reflexion des polarisierten Lichtes.

Etwas später wurde von Seebeck bemerkt, dass seine eigenen Erklärungen über die Reflexion mit Mac Cullaghs Formeln nicht übereinstimmten, weshalb er die letzte Hypothese verwarf und an deren Stelle die Hypothese der Kontinuität der Kraftwirkung setzte. Er wurde durch Neumanns Theorie darauf geführt.

Das schönste Werk Mac Cullaghs ist seine Abhandlung über die dynamische Theorie der krystallinischen Reflexion und Refraktion. Er hebt darin hervor, dass der Hauptpunkt in der dynamischen Äthertheorie in der Entdeckung der Funktion der lebendigen Kräfte von Lagrange liegt, von welcher Funktion die Wirkungsweise des Mediums abhängig ist, und dass die Erklärung der Form dieser Funktion eine andere wichtige Aufgabe bildet. Er fand eine einfache Form dieser Funktion, welche gestattete, das ganze Gebiet der theoretischen Optik zu umfassen, abgesehen stets davon, dass die Absorption keine hervorragende Rolle in den Vorgängen spielt. Er suchte in der Folge eine dynamische Basis, um die Form der Gleichung der lebendigen Kräfte zu erklären; jedoch glückte ihm dies nicht, aber er tritt gegen die beschränkte Ansicht auf, welche dazu zwingt, dem Lichtäther mysteriöse und paradoxe Eigenschaften beizulegen, welche von denen der gewöhnlichen elastischen festen Körper verschieden sind.

Mac Cullagh gelangt leicht zu dem Ausdrucke der Kraftwirkung, indem er davon absieht, dass in einem krystallisierten Medium die Verschiebung in der Auffallebene der Welle vor sich geht. Georg Stokes weist darauf hin, dass andere Ausdrücke der Kraft-

wirkung gestatten, dieser Bedingung Genüge zu leisten, und dass diese Schlussfolgerung auch aus den von Green erhaltenen Ergebnissen abgeleitet werden kann. Aber die Untersuchung Mac Cullaghs ist insofern interessant, als dadurch die Kraftwirkung des Mediums einzig und allein von den Verschiebungen der Rotation seiner Elemente im Anfang ihres Ausgleichungsbestrebens und nicht von ihrer Verzerrung oder ihrer Kompression abhängig gemacht wird, wie dies Green bezüglich der Elastizität gewöhnlicher fester Körper annimmt.

36. Wenn man von dieser Annahme eines mit Rotationselastizität begabten Mediums ausgeht, so lässt sich bei vorläufiger Vernachlässigung der Zerstreuung nachweisen, dass ein krystallinisches Medium drei Hauptachsen der Elastizität besitzt und dass die Wellenoberfläche genau der Fresnelschen Annahme entspricht; hieraus folgt, dass die theoretischen Ergebnisse sich mit den Erfahrungsergebnissen in Übereinstimmung befinden.

Bekanntlich lässt sich aber die Zerstreuung des Lichts in den Theorien der Elastizität durch Einführung von Differentialen höherer Ordnung im Vergleich zu denen der Glieder, welche bei Vernachlässigung der Zerstreuung genügend sind, erklären. Diese Ausdrücke können unzweifelhaft als von Zusatzgliedern zu dem Ausdruck der Kraftwirkung des Mediums herrührend betrachtet werden. Wenn man annimmt, dass dieses kontinuierliche Medium eine von der Verzerrung und von der Kompression unabhängige Elastizität besitzt, welche nur zu den Rotationen in Beziehung steht, so wird dadurch festgestellt, dass die Zusatzglieder, welche man dem Ausdrucke der Kraftleistung beifügen kann, von zweierlei Art sind. Die Zusatzglieder der einen Art drücken nur die Änderung der Fresnelschen Wellenfläche aus, während die Zusatzglieder der anderen Art die von Mac Cullagh ohne Beweis angenommene Modifikation nachweisen lassen. Die ersteren Zusatzglieder sind nur abhängig von der dispersiven Eigenschaft und von der Bewegung der Welle; die zuzweit erwähnten Zusatzglieder sind aber von der zweiten Potenz der dispersiven Eigenschaft abhängig. Man kann annehmen, dass diese letzteren solchen Erscheinungen entsprechen, die von noch kleineren Ausdrücken abhängig sind, als diejenigen, von welchen die Ausdrücke bedingt sind, um deren Erklärung es sich handelt, so dass sie vernachlässigt werden können. Es bleiben alsdann nur die Ausdrücke übrig, welche — wie angegeben worden ist — keine Veränderungen auf der Fresnelschen Oberfläche für eine bestimmte Welle hervorbringen, sondern die Richtung und die Grösse der optischen Achsen des Krystalls verändern,

wenn man von einer homogenen Lichtquelle zur anderen übergeht, wodurch die Zerstreuung (Dispersion) erklärt werden kann.

Larmor bemerkt hierzu, dass man, um zu dieser Erklärung zu gelangen, alle Glieder weglassen muss, welche einen einseitigen Charakter besitzen, das heisst, welche auf einer Hemiedrie des Mediums beruhen. Wenn man dies berücksichtigt, so erklärt man die Rotationskraft, welche Erklärung sich sowohl auf Flüssigkeiten als auch auf feste Körper anwenden lässt.

Es ist ferner noch darauf hinzuweisen, dass, wenn man in der Formel für das Kraftleistungsvermögen des Mediums die Ausdrücke für die Zerstreuung in Betracht zieht, die Erklärung der Reflexion, welche für jede Wellenlänge denselben Gesetzen folgt, einige Schwierigkeiten bietet. Sobald man annimmt, dass auf der Trennungsfläche der beiden Medien Oberflächenkräfte vorhanden sind, deren Wirkung keine Kraftleistung absorbiert und welche den Teil der Störung beherrschen, der sich auf die Zerstreuung bezieht, so gelangt man zu dem Nachweise, dass die Reflexion von der Wellenlänge unabhängig ist.

Auf diese Weise kann man nach Mac Cullaghs Theorie alle optischen Erscheinungen erklären und dieselben unter einer streng dynamischen Form entwickeln, vorausgesetzt, dass der Äther die Eigenschaften des von William Thomson angenommenen gyrostatischen Äthers besitzt. Dies ist der Hauptpunkt, welchen Larmor zu beweisen suchte.

37. Es handelt sich jetzt um die Betrachtung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen mit Bezug auf die nachweisbaren Wirkungen des Primordialmediums, des Äthers.

Clark Maxwell gebührt der Ruhm, die Aufgabe des Nachweises der Natur des Äthers mit Rücksicht auf die elektrischen Erscheinungen in Angriff genommen zu haben. Seine berühmte Abhandlung über eine dynamische Theorie des elektromagnetischen Feldes datiert vom Jahre 1864. In dieser Epoche waren die Entdeckungen und Arbeiten von Oersted, Ampère, Faraday und W. Thomson verhältnismässig neu und die Materialien, welche daraus resultierten, waren kaum genügend zum Aufbau einer dynamischen Theorie. Wenn man diese Thatsache in Betracht zieht und ferner berücksichtigt, dass noch heutigen Tages unsere Erfahrungen über das, was den elektrischen und magnetischen Erscheinungen zu Grunde liegt, noch unbestimmter sind, als unsere Ideen über die Strahlung, so kann man sich nicht wundern, dass die Untersuchungen Maxwells in vielen Beziehungen auf grosse Hindernisse und Schwierigkeiten stiessen. Darin liegt unzweifelhaft auch der Grund, dass der Teil der Theorie Maxwells,

welcher sich auf die elektrische Strahlung und auf die elektromagnetische Induktion in ruhenden Leitern bezieht, sehr klar ist, wogegen das, was sich auf die Natur der elektrischen Verschiebungen, der elektrischen und magnetischen Kräfte, oder — wie Maxwell sich ausdrückt — auf die elektrischen und magnetischen Pressungen im Medium, sowie endlich noch auf die elektrochemischen Erscheinungen bezieht, ziemlich unklar erscheint.

Larmor ist der Ansicht, dass viele Schwierigkeiten überwunden werden können, wenn man die Aufgabe an dem entgegengesetzten Ende im Vergleich zu Maxwells Vorgange angreift. Anstatt also bei elektrischen Erscheinungen nach der Strahlung zu fragen, soll man lieber versuchen diese Erscheinungen selbst zu erklären, indem man sich dabei auf eine dynamische Theorie der Strahlung stützt. Dies kann dadurch geschehen, dass man von der Annahme des vorausgesetzten Lichtäthers ausgeht.

Es ist daher anzunehmen, dass die dielektrische Polarisation in einer Deformierung des Äthers besteht, welche einen rotierenden Charakter hat. Die Gleichgewichtsbedingungen für den einer solchen Deformation unterworfenen Äther lassen sich leicht aus dem von Mac Cullagh für die sogenannte potentielle Energie (das Kraftleistungsbestreben oder kurzweg die Kraft) erhaltenen Ausdruck herleiten. Wenn der Vektor $(f, g, h)$ die Wirbelbewegung der linearen Verschiebung, das heisst die doppelte absolute Rotation desjenigen Teiles des Mediums im betrachteten Punkte bezeichnet und wenn das Medium auf die drei Elastizitätsachsen bezogen wird, so hat man

$$W = \frac{1}{2} \int\int\int (a^2 f^2 + b^2 g^2 + c^2 h^2)\, d t.$$

Die inneren Gleichgewichtsbedingungen sind also derartig, dass der Ausdruck

$$a^2 f\, d x + b^2 g\, d y + c^2 h\, d s$$

ein genaues Differential — $d V$ ergiebt und dass auf einer Oberfläche eine der Elastizität $V$ beraubte Region einen konstanten Wert hat.

Mit Rücksicht auf die elektrische Wirkung ist eine solche Oberfläche diejenige eines Leiters; $V$ ist das elektrische Potential; die durch $(f, g, h)$ bestimmte elektrische Verschiebung ist dann kreisförmig, weil diese Verschiebung in einer Rotation besteht; die elektrische Kraft $(a^2 f, b^2 g, c^2 h)$ wird vom Potential $V$ herbeigeführt. Die Ladung eines Leiters ist das Integral von $(f, g, h)$ auf dem Teil einer Oberfläche, welchen es umgiebt; folglich kann sein Wert nur dann sich ändern, wenn die Oberfläche der Integration von einem Kanal durchschnitten wird,

welcher der Elastizität beraubt ist; mit anderen Worten: die elektrische Entladung kann sich nur in Folge einer Durchbrechung des Äthers vollziehen.

Wenn man die Trennungsoberfläche von zwei Medien betrachtet, welche verschiedene Elastizitäten besitzen, so reduziert sich die Gleichgewichtsbedingung derartig, als wenn die elektrische Kraft kontinuierlich wäre. Diese Bedingung erfordert, dass der Wert des Potentials auf der Oberfläche eine Diskontinuität biete und dass diese Diskontinuität in jedem Punkte dieselbe sei. Auf diese Weise werden die Potentialdifferenzen im Kontakt der beiden Körper ausgedrückt.

38. Es ist jetzt zu untersuchen, inwiefern diese Anschauungsweise der elektrischen Erscheinungen unsere Kenntnis der Eigenschaften des elektrischen Stromes bereichert. Um die Komplikationen zu vermeiden, welche mit der Betrachtung einer galvanischen Batterie verknüpft sind, betrachten wir ein von zwei ebenen Kondensatoren $A$ und $B$ gebildetes System, welches dadurch hergestellt wird, dass die eine Belegung von $A$ mit einer Belegung von $B$ und die andere Belegung von $A$ mit der zweiten Belegung von $B$ durch Metalldrähte verbunden ist; wenn man nun die eine der beiden Platten des Kondensators $A$ zur anderen Platte in normaler Richtung zur Plattenfläche verschiebt, so wird in den Verbindungsdrähten ein Leitungsstrom und zwischen den Belegen der Kondensatoren ein Verschiebungsstrom hervorgerufen. Wir nehmen an, dass die Entfernung dieser Belegungen unendlich klein sei, um dadurch die Bedeutung des Verschiebungsstromes auf ein Minimum herabzudrücken, so dass im praktischen Sinne die elektrische Kraft und in Folge dessen auch die Verschiebung Null ist in allen Punkten des Dielektrikums, welche sich nicht zwischen den Belegen von $A$ und $B$ und nicht in der unmittelbaren Nähe der Leitungsdrähte befinden. Wenn wir eine geschlossene Fläche annehmen, welche zwischen den Belegen des Kondensators $A$ hindurchgeht, so schneidet diese den betreffenden Verbindungsdraht in einem gewissen Punkte $P$. Die Verschiebung der Platten von $A$ bringt daher eine Veränderung der elektrischen Kraft in allen zwischen diesen Platten gelegenen Punkten hervor, wodurch eine elektrische Verschiebung auf jedem Teil der in diesem Kraftfelde befindlichen geschlossenen Oberfläche herbeigeführt wird. Da aber nach der vorher erwähnten Annahme die elektrische Kraft in allen übrigen Punkten, welche sich nicht in der Nähe der Oberfläche des Drahtes befinden, Null ist, so muss man, um der elektrischen Verschiebung ihren kreisförmigen Charakter durch den ganzen Raum zu erhalten, annehmen, dass die Änderung der Verschiebung auf der zwischen den Kondensatorplatten gedachten Ver-

schiebung durch eine sehr intensive Verschiebung längs des Drahtes bei $P$ kompensiert wird. Der elektrische Strom besteht daher in einer Variation einer Verschiebung, das heisst in einem Wirbel. Es ist daher leicht die Beziehung auszudrücken, welche zwischen dem Strom und der magnetischen Kraft besteht. In dieser Theorie ist die in einem Punkte vorhandene magnetische Kraft nichts anderes, als die Geschwindigkeit des Äthers in diesem Punkte*).

Aber, in der Berechnung der Geschwindigkeit in einem Punkte eines Mediums, in welchem eine wirbelartige Kraftentfaltung vorhanden ist, muss — wie Helmholtz nachgewiesen hat — das Vorhandensein einer Wirbelschicht auf der ganzen Oberfläche angenommen werden, auf welcher die Bewegung diskontinuierlich ist. In Folge davon muss man in der Berechnung der magnetischen Kraft der Wirkung der elektrischen Verschiebungsschicht oder Gleitfläche Rechnung tragen, welche längs der Oberfläche der Leitungsdrähte fliesst.

Wir ziehen jetzt einen Strom in Betracht, der in einem vollkommen geschlossenen Leitungskanale fliesst; da derselbe keinen Zähigkeitswiderstand zu überwinden hat, so wird derselbe unendlich lange erhalten. Wir können uns die Hervorbringung eines solchen Stromes denken, indem wir voraussetzen, dass, sobald der Strom durch die Verschiebung der Platten $A$ des Kondensators $A$ hervorgebracht worden ist, alle Kondensatoren beseitigt und durch Leiter ersetzt worden sind, welche die frei gewordenen Enden der Verbindungsdrähte vereinigen. Die kinetische Energie des Mediums ist dann ein Integral des Volumens, welches von der magnetischen Kraft abhängig ist. Aber man kann dasselbe leicht in das Integral einer Kurve transformieren, welches die Funktion des Stromes enthält, und gelangt dadurch leicht zu der berühmten Formel Neumanns für die elektromagnetische Kraft eines linearen elektrischen Stromes, eine Formel, welche genügend allgemein ist, dass man dieselbe als Basis für die ganze Elektrodynamik annehmen kann.

Ein grosser Teil der elektrischen Erscheinungen kann alsdann durch die Bewegung des Äthers erklärt werden. Indessen bietet die Verähnlichung eines elektrischen geschlossenen Stromes zu einer geschlossenen Wirbellinie wenigstens eine scheinbare Schwierigkeit. In der That bleibt der Wert des Wirbels in jedem Punkte einer solchen Linie für unendliche Zeit derselbe, folglich würde die Stromstärke für unend-

*) Die Vergleichung der elektrodynamischen Gleichungen und der Gleichungen, durch welche die wirbelnden Bewegungen zum Ausdruck gebracht werden, führt in der That dazu, die magnetische Kraft (oder besser gesagt: die magnetische Induktion) als gleich der Geschwindigkeit des Äthers anzusehen.

liche Zeitdauer konstant bleiben müssen, was aber nicht der Fall ist. Um diese Schwierigkeit zu beheben, ist nur nötig darauf hinzuweisen, dass in Wirklichkeit die elektrischen Ströme sich nur in einem vollkommen leitenden und vollkommen isolierten Stromkreise erhalten können; die gewöhnlichen Leiter besitzen eine Art von Zähigkeit und die Leitungsströme werden immer begleitet oder vervollständigt, entweder von einer elektrolytischen Übertragung, oder von einer elektrischen Verschiebung oder auch von einer Entladung. Die praktischen Bedingungen sind deshalb von den in der Theorie vorausgesetzten verschieden.

39. Es giebt indessen einen Fall, wo es gestattet ist, das Vorhandensein eines Kraftstromes für unendliche Zeitdauer ohne Energie, oder Kraftverlust anzunehmen. Es ist dies der Fall, wo man die molekularen Ströme nach der magnetischen Theorie Ampères betrachtet. Wenn man mit W. Thomson annimmt, dass das materielle Atom ein geschlossener Wirbel ist, so entspricht diese Voraussetzung der Ampèreschen Hypothese und der Magnetismus ist erklärt.

Immerhin besteht alsdann noch eine Schwierigkeit, denn es würde aus dieser Annahme zu folgern sein, dass alle Körper magnetisch sind. Bekanntlich sind aber die magnetischen Substanzen relativ wenig zahlreich und das Eisen kann die magnetische Eigenschaft, welche es in hohem Grade besitzt, verlieren, sobald man eine entsprechend hohe Temperatur auf dasselbe einwirken lässt.

Es scheint daher gerechtfertigt, wenn man das Vorhandensein des Magnetismus auf eine molekulare Anordnung der Wirbelatome zurückführt, welche mit der Natur der Substauzen und ihrer Temperatur verschieden ist, und dass somit die magnetischen Eigenschaften jedes Atoms sich gegenseitig kompensieren.

Die Ursache dieser molekularen Anordnung kann nicht in die elektrodynamischen Kräfte der atomigen Ströme verlegt werden, denn man weiss, dass dadurch diese Ströme sich dergestalt einstellen würden, dass ihre magnetischen Eigenschaften sich ausgleichen. Aber die elektrolytischen Erscheinungen beweisen das Vorhandensein von ionischen Ladungen, welche sich anziehen oder abstossen im umgekehrten Verhältnis der zweiten Potenz der Entfernung. Da diese beiden Arten von Kräften einander entgegenwirken, so darf man hoffen, die Erklärung einer geeigneten Anordnung der Atome in den Molekülen durch ihre gleichzeitige Betrachtung zu finden.

40. Durch die Annahme, dass in dem magnetischen Zustande elektrische Kräfte zwischen den statischen Ladungen und den elektrodynamischen Kräften eingreifen, ist Larmor darauf geführt worden,

eine Erklärung dieser Kräfte durch die Eigenschaften des Äthers zu versuchen und zwar in der folgenden Weise:

Es werden zwei elektrisch geladene und in Bewegung befindliche Leiter angenommen. Die Verteilung der Ladungen variiert, aber wenn die Leitungsfähigkeit vollkommen und die Bewegung langsam ist, so bleibt sie oberflächlich. Diese Änderung der Verteilung kann als die Resultante einer sehr intensiven elektrischen Verschiebungsströmung angesehen werden, welche auf den leitenden Oberflächen stattfindet. Diese Strömung befindet sich in der Nähe der elektrischen Strömungen, welche sich um die in der Nähe der Oberflächen vorhandenen Wirbelatome drehen und aus der gegenseitigen Reaktion dieser Strömungen resultiert eine sehr grosse elastische Störung des Äthers. Es entstehen daher an der Oberfläche der Leiter Wellen, welche sich im Dielektrikum fortpflanzen. Diese Wellen müssen Kraftwirkungen mit sich führen, welche sie der elektrischen Kraftwirkung des Mediums entnehmen. Aber da ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausserordentlich gross ist im Verhältnis zu der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung der Leiter, so befindet sich der Äther in jedem Augenblicke in einer Art Gleichgewichtszustand und die Wellen müssen unmerklich sein. Die Richtigkeit dieser Anschauung wird bestätigt durch die Differenz der Wirkung auf die eine rasch schwingende Stimmgabel umgebende Luft im Gegensatz zu der Wirkung der langsamen Schwingungen eines Pendels; im ersten Falle pflanzen sich Schallwellen in der Luft fort; im zweiten Falle, wo die Geschwindigkeit des Pendels im Verhältnis zur Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles sehr gering ist, entstehen keine Schallschwingungen. Aber in diesem letzteren Falle sind die in der Nähe des Pendels nichtsdestoweniger in einem Zustande der Verdichtung oder Verdünnung je nach ihrer Lage im Verhältnis zu dem bewegten Pendel. Wenn man annimmt, dass ähnliche Verhältnisse in dem die in Bewegung befindlichen Leiter umgebenden Äther stattfinden, so können die mechanischen Kräfte, welche zwischen ihnen wirksam zu sein scheinen, den Druck- oder Zugwirkungen des Äthers zugeschrieben werden. Da ausserdem aber durch die Wellen im Dielektrikum keine merkliche Kraftmenge übertragen wird, so muss sich der Kraftverlust vollständig unter der Form mechanischer Arbeit wiederfinden.

Diese Erklärung der elektrodynamischen Kräfte gestattet ausserdem in ihre Wirkungsweise tiefer einzudringen. Es folgt daraus in der That, dass der Gewinn an mechanischer Kraftleistung des Leiters in einer Kraftaufnahme an der Oberfläche besteht; folglich ist die auf den Leiter ausgeübte Wirkung eine Oberflächenwirkung und keine Wirkung auf das Volumen, welches diese Wirkung besitzt. Aber

bekanntlich kann eine Flächenkraft oder Kraftfläche durch eine auf die Fläche normal wirkende Kraft ersetzt werden. Wenn daher auch diese Flächenkraftverteilung wirklich vorhanden ist, so kann man doch ihre Wirkungen, wie dies üblich ist, als elektrostatische betrachten, das heisst, als die Wirkung einer zur Oberfläche normalen Kraft auf die elektrische Ladung dieser Fläche.

Wenn aber die mechanischen Kräfte einer Oberflächenverteilung der Kräfte zuzuschreiben sind, so ist es unnötig, den von den Leitern innerhalb eines Dielektrikums eingenommenen Raum zu betrachten, es genügt daher, das Dielektrikum allein in der Beschränkung auf die Leiteroberflächen zu behandeln. Die Gleichgewichtsbedingung des Systems ist die, dass für eine unendlich kleine Verschiebung, die mit den Vereinigungen vergleichbar ist, die Formel gilt:

$$\delta \int (T - W)\, dt + \int dt \int \delta w\, dS = 0,$$

wo $T$ der sogenannten kinetischen Energie des Mediums entspricht, welche durch die Formel Neumanns gegeben ist, während $W$ die Bedeutung der durch die elektrostatische Verteilung hervorgerufenen sogenannten potentiellen Energie und $\delta w\, dS$ die Arbeit repräsentiert, welche auf das Element $dS$ einer der Oberflächen wirksam ist. Wenn in den Stromkreisen elektromotorische Kraftquellen vorhanden sind, so hat man der Kraftwirkung Rechnung zu tragen, welche sie dem System zuführen, indem man in dem zweiten Gliede der Gleichung den Ausdruck für die Arbeitsgrösse oder Kraft einsetzt, welche diese Kraftquellen während der Verschiebung liefern.

Indem man die verschiedenen Ausdrücke dieser Gleichung als Funktionen der Koordinaten oder der unabhängigen Parameter ausdrückt, welche das System vollständig bestimmen, und dann die Koeffizienten der Variation jedes Parameters auf Null ausgleicht, so erhält man die Formeln:

$$\Phi = \frac{de}{dt}\frac{d\tau}{d\varphi} - \frac{d\tau}{d\varphi} + \frac{dW}{d\varphi},$$

$$\varepsilon = \frac{de}{dt}\frac{d\tau}{de'}.$$

In diesen Gleichungen ist $\Phi$ eine Komponente der mechanischen Kraft, welche auf das gedachte dielektrische System durch die Leiter ausgeübt wird und deren Kraftgrösse durch $\Phi\,\delta\varphi$ für eine Variation $\delta\varphi$ der Koordinate $\varphi$ gegeben ist; folglich ist die Komponente der entsprechenden auf die Leiter wirksamen Kraft $-\Phi$; $\varepsilon$ ist die elektromotorische Kraft, welche auf das System von aussen in einem Strom-

kreise einwirkt, wo die Verschiebung $e$ und folglich der Strom $e' = \frac{d e}{d t}$ ist; die in diesem Stromkreise durch das Dielektrikum induzierte elektromotorische Kraft ist daher $-\varepsilon$.

In diesen Gleichungen sind alle elektrodynamischen Erscheinungen und die Vorgänge der Induktion berücksichtigt; sie entsprechen auch der elektrostatischen Zugkraft der Leiter auf das Dielektrikum; diese Zugkraft ist $\frac{d W}{d \varphi}$, daher ist die dielektrische Zugkraft auf die Leiter $-\frac{d W}{d \varphi}$.

41. Der Spannungszustand des Äthers zwischen zwei elektrisierten Körpern besteht in einer tangentialen Zugkraft, welche auf jedes Oberflächenelement ausgeübt wird und in der Grösse mit der Tangentialkomponente der in einem Punkte dieses Elements vorhandenen und senkrecht auf seine Richtung wirkenden elektrischen Kraft übereinstimmt. Der Spannungszustand der Materie des Dielektrikums wird durch die Oberflächenzugkräfte hervorgebracht, welche durch die in diesem Dielektrikum befindlichen Leiter auf diese Materie ausgeübt werden. Die von Faraday und Maxwell angenommenen Pressungen und Spannungen (stress and strains) haben keine reelle Existenz; diese sind in Wirklichkeit Pressungen und Spannungen, welche auf die Oberfläche eines Leiters einwirken würden, welchen man zur Untersuchung des Kraftfeldes benutzte, wenn die Einführung dieses Leiters keine Störung des Kraftfeldes herbeiführen würde. Ebenso sind die magnetischen Pressungen und Spannungen, welche Maxwell annimmt, nur eine mathematische Ausdrucksweise für die dynamische Reaktion des Äthers.

Es ist nun die elektrostatische Polarisation des Dielektrikums in Betracht zu ziehen. In einer Abhandlung über die elektrodynamische Theorie*) hat Larmor nachgewiesen, dass die Erklärung der Polarisation durch eine wirkliche Verschiebung der Elektrizität in den leitenden, im Dielektrikum zerstreuten Molekülen mit dem kreisenden Charakter des Stromes unvereinbar ist. Daher muss eine andere Erklärung gesucht werden.

Wie im Vorhergehenden bezüglich der Erklärung des Magnetismus angeführt worden ist, wird von Larmor die wirkliche Existenz der polarisierten Moleküle mit ihren positiven und negativen Jonen angenommen. Der kreisende Charakter des Stromes erfordert, dass die elektrische Kraft eines Feldes die gegenseitigen Wirkungen der Wirbel,

*) Roy. Soc. Proc., t. XLIX, p. 522. 1891.

welche das Molekül bilden und wovon ihre Einstellung abhängig ist, nicht stören und die Verteilung der elektrischen Ladungen der Atome nicht verändern. Durch eingehende Betrachtungen wird von Larmor nachgewiesen, dass diese Ausnahmen verwirklicht werden können, wenn man voraussetzt, dass die beiden Pole zweier Moleküle genügend einander genähert und die Dimensionen der Atome genügend klein sind.

Es ist nur noch darauf hinzuweisen, dass in dem Falle, wo der Körper, welcher der Wirkung des Kraftfeldes unterliegt, ein Elektrolyt ist, der den Vorgang begleitende Strom zur Hervorrufung der Elektrolyse einen Durchbruch des Äthers zwischen der einen Elektrode und einem Jon erfordert, weil zwischen diesem Jon und dem folgenden die Elektrizität durch die Risse des Äthers von einer Elektrode zur andern geht. Diese leichte Durchbrechung des Äthers führt eine Verminderung seiner Elastizität herbei. Es scheint daher das Vorhandensein der Wirbelatome im Äther einen ähnlichen Zustand zu erzeugen, wie die fehlerhaften Stellen in einem elastischen Körper mit sich bringen. Daher ist es begreiflich, dass die induktive spezifische Kapazität der dielektrischen Substanzen grösser ist, als die des leeren Raumes. Hiernach muss die induktive Kapazität der Elektrolyte sehr gross sein, was thatsächlich der Fall ist.

42. Nachdem in dieser Weise Larmor von den Strahlungsvorgängen ausgegangen ist, um zu den elektrischen Erscheinungen zu gelangen und dieselben gründlich erörtert hat, kehrt er zur Betrachtung der Strahlungsvorgänge zurück, um eine wichtige Thatsache ins Auge zu fassen. Es ist dies die Thatsache, dass die Schwingungsperiode, welche den verschiedenen Spektrallinien eines Körpers entspricht, von der Temperatur dieses Körpers unabhängig ist.

Die Erklärung stützt sich auf die ausserordentliche Kleinheit der Atome. Diese Kleinheit führt eine sehr intensive Elektrisation und folglich eine relative Unabhängigkeit von dem äussern Kraftfelde herbei. Ausserdem ist bereits angenommen, dass die Dimensionen und Konfigurationen des Atoms durch die sehr kräftigen Wirkungen bedingt werden, welche zwischen jedem einzelnen Atom und den benachbarten zu demselben Molekül gehörigen Atomen herbeigeführt werden. In Folge ihrer Intensität werden diese Wirkungen kaum von dem relativ schwachen Einflusse der Verschiebungsgeschwindigkeit des Moleküls im Medium berührt. Da eine Temperaturänderung nur auf die Veränderung dieser Geschwindigkeit hinwirkt, so wird diese Änderung keinen merklichen Einfluss auf die Dimensionen und auf die Gestaltungen des Atoms und daher auch nicht auf die elektrischen Schwingungen

der atomigen Ladungen haben, welche Schwingungen die Strahlung hervorbringen.

43. Es bleibt jetzt nur noch übrig, das Ohmsche Gesetz und das Joulesche Gesetz zu erklären. Hierbei ist auf eine Erörterung von George Stokes bezüglich der von Mac Cullagh behandelten Stabilität des Äthers hinzuweisen. Im Jahre 1862 hat Stokes nachgewiesen, dass in einem Medium dieser Art die zur Oberfläche eines Volumenelementes tangentialen Kräfte sich nicht ausgleichen können und dass in Folge davon das Medium sich nicht im Gleichgewichtszustande befinden kann. Dieser Einwand gegen die von Mac Cullagh behauptete Stabilität des Äthers ist von grösster Wichtigkeit und es liegt darin der Grund, dass man die Mac Cullaghsche optische Theorie nicht mehr anerkennt. Wie Larmor ausführt, lässt sich derselbe Einwand auch auf die Elastizität anwenden, welche in Wirklichkeit durch eine gyrostatische Verteilung in einem gewöhnlichen festen Körper hervorgerufen wird, und diese Bemerkung bringt Larmor auf den Gedanken, dass die Schwierigkeit, die sich hier der Erklärung des Vorganges entgegenstellt, überwunden werden kann.

Wenn man nämlich, wie Larmor ausführt, die nach Newtons Art aufgestellten Bewegungsgesetze im Verhältnis zum absoluten Raume als Fundamentalprinzipien betrachtet, so hat man auch als Fundamentalprinzip die Hypothese aufzustellen, dass die Kraftleistung eines rotierenden Gyrostats im Verhältnis zum absoluten Raume und nicht zum materiellen System steht, welches das Gyrostat enthält. Das Gyrostat kann als eine Art Verbindung betrachtet werden, welche dieses System mit dem absolut unbeweglichen Raume mittels der Kraft verknüpft, welche sich der Rotation entgegensetzt. Darin liegt der Grund, aus welchem das Element der Masse eines gyrostatischen Mediums mit seinen kinetischen Reaktionen der Verschiebung im Gleichgewicht bleibt, obgleich die Zugkräfte, welche die umgebenden Teile auf seine Oberfläche ausüben, sich nicht im Gleichgewicht befinden und ein Kräftepaar bilden.

Ausserdem kann vielleicht einiges Licht auf diese Frage geworfen werden, wenn man ein wirkliches Medium betrachtet, welches genau die Elastizität der Rotation des von Mac Cullagh gedachten Äthers besitzt. Ein solches Medium ist ein fester Körper, in welchem kleine Magnete in willkürlicher Art zerstreut sind, aber immerhin derartig, dass in einem kleinen Volumenelemente eine Regelmässigkeit ihrer Einstellung vorhanden ist. Wenn ein solches Medium ohne innere elastische Anstrengungen sich in einem magnetischen Felde im Gleichgewicht befindet, so wird die Rotation eines seiner Elemente die Wirkung haben, dass ein Kräftepaar hervorgebracht wird. Die Ursache dieser Rotation

kann eine magnetische Kraft sein, welche entweder vom Medium selbst oder von einem äusseren System herrührt. Damit diese Ursache aber einheitlich auf das betrachtete Element einwirkt, ist es notwendig, dass diese Ursache momentan auf dieses Element einwirkt, ohne die benachbarten Teile zu beeinflussen, oder dass wenigstens seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit unverhältnismässig grösser ist, als diejenige der Störungen, welche die Elastizität des Mediums ins Spiel setzen.

44. Diese Art der Anschauung über die Natur des Äthers führt Larmor auf einen Vorschlag zur Erklärung der Gravitationserscheinungen. Alles, was darüber bekannt ist, geht darauf hinaus, dass, wenn die Gravitationskraft oder Schwerkraft sich mit einer endlichen Geschwindigkeit fortpflanzt, diese Geschwindigkeit unvergleichbar grösser als diejenige des Lichtes ist. Es erscheint daher die Annahme als zulässig, diese Erscheinungen durch die Thatsache zu erklären, dass die tangentialen Zugkräfte eines Ätherelementes bei einer Deformation dieses Elementes ein Kräftepaar bilden. Es ist aber dabei keineswegs an ein Poinsotsches Kräftepaar zu denken, bei welchem Gleichheit der an einer starren geraden Linie normal angreifenden parallelen Kräfte vorausgesetzt wird, sondern es ist anzunehmen, dass der eine Hebelarm des gyrostatischen Diameters im Verhältnis zum andern Hebelarm unendlich klein und daher die daran angreifende Tangentialkraft im Verhältnis zur anderen Paarkraft momentan unendlich gross werden kann, wobei der Drehpunkt verschiebbar ist. Der angedeutete Einwand wird durch diese Annahme nicht nur keine Schwierigkeit in der Erklärung der Natur des Äthers bilden, sondern es wird dadurch eine neue Art der Wirkungsweise des Äthers in Betracht gezogen. Der Verfasser weist in dieser Beziehung auf das von ihm bereits im Jahre 1890 aufgestellte Prinzip des dynamischen Schwerpunktes hin, welches weiterhin dargelegt werden wird.

Bei allen vorhergehenden Betrachtungen ist zur Vermeidung von unnötigen Komplikationen vorläufig angenommen worden, dass in keinem Punkte des Medium eine Zähigkeit vorhanden ist, sondern dass, wie dies auch Lagrange und Hamilton voraussetzen, bei der Betrachtung von Naturvorgängen schliesslich nur freie Kraftpunktsysteme zu behandeln sind. Will man aber diese Betrachtungen auf die von der Lichtdurchlässigkeit der Substanzen abhängigen optischen Erscheinungen und auf die vom sogenannten Widerstande bedingten elektrischen Vorgänge ausdehnen, so ist es allerdings erforderlich die Kraftwirkungen der Zähigkeit oder — mit anderen Worten — die Aggregationskräfte der Materie mit in Betracht zu ziehen. Diese Aggregationskräfte werden aber immer erst dann in das Spiel treten, wenn ein bestimmter

kritischer Punkt bei der Beanspruchung des Materials durch die ihm aufgezwungenen Erregungskräfte überschritten wird. Im Vorhergehenden handelte es sich jedoch nur um die Aufstellung abstrakter Prinzipien, wobei nur freie Kraftpunktsysteme in Betracht zu ziehen sind.

45. Rayleigh hat in diesem Sinne in Übereinstimmung mit dem oben aufgeführten Grundsatze Lagranges und Hamiltons nachgewiesen, dass die Einführung der Funktion der Zerstreuung in die Dynamik gestattet, das Fundamentalprinzip der geringsten Wirkung auf alle Systeme auszudehnen, in denen die Zähigkeitskräfte proportional zu den absoluten und relativen Geschwindigkeiten der Systemteilchen sind, an denen sie zum Angriff kommen. Aber es lässt sich beweisen, dass bei der Annahme von Zähigkeitskräften, welche anderen Gesetzen gehorchen, die Periode der in einem Medium sich fortpflanzenden Welle von ihrer Amplitude abhängig sein muss; mit anderen Worten: es lässt sich beweisen, dass ein homogener Lichtstrahl, der auf ein stark absorbierendes Medium, also etwa auf eine dünne Metallplatte fällt, bei dem Austritt ein Gemisch von Strahlen verschiedener Farben geben wird. In Folge davon lassen sich die Zähigkeitskräfte des in materiellen Medien befindlichen Äthers für den Fall der Lichtstrahlung von einer Funktion der Zerstreuung ableiten und es ist die Annahme gestattet, dass dieses auch bei den viel langsameren elastischen Bewegungen der Fall ist, welche die gewöhnlichen elektrischen Störungen bilden. Auf diese Weise gelangt man von der anfänglichen Betrachtung der optischen Vorgänge auf das Joulesche Gesetz für die Zerstreuung der elektrischen Kraft, sowie auf das Ohmsche Gesetz, welches aus dem Jouleschen abgeleitet werden kann; überhaupt gelangt man durch diese Betrachtungen auf die ganze elektrodynamische Theorie der um einen gewöhnlichen Leiter kreisenden Ströme.

Wenn man voraussetzt, dass die Form der Zerstreuungsfunktion für hohe und niedere Wechsel- oder Schwingungszahlen identisch ist, so erhält man die gewöhnliche Theorie der metallischen Reflexion. Diese unterscheidet sich nur insofern von der Reflexion auf durchsichtigen Körpern, dass der Refraktionsindex in den metallischen Körpern eine komplexe Grösse ist, was anfangs von Cauchy und alsdann im allgemeineren Sinne durch Mac Cullagh angenommen worden ist.

Überhaupt bietet diese Theorie eine hervorzuhebende Schwierigkeit. Rayleigh hat darauf hingewiesen, dass zur Übereinstimmung der Formeln dieser Theorie mit den Erfahrungsergebnissen über metallische Reflexion der wirksame (reelle) Teil der komplexen Grösse, welche den Refraktionsindex darstellt, einen negativen Wert erhalten muss.

Diese Bedingung führt zu einer Instabilität des Mediums. Allerdings kann man (nach Gibbs) sich denken, dass ein reziproker Einfluss zwischen den Lichtschwingungen, den Schwingungen der atomigen Ladungen und den chemischen Schwingungen der Atome besteht, indem ihre Perioden von derselben Grössenordnung sind, und es ist möglich, dass unter diesen Bedingungen das Gleichgewicht erhalten werden kann.

46. Im Vorhergehenden ist ein grosses Gebiet qualitativ zusammengehöriger Erscheinungen aus den verschiedenen Abteilungen der Physik, insbesondere aber der Lehre von der Elastizität, der Optik und der Elektrizität in Betracht gezogen worden. Unter den zur Erklärung dieser Erscheinungen aufgestellten Theorien wurden insbesondere die Wirbeltheorie oder die sogenannte gyrostatische Theorie von William Thomson, sowie die dynamischen Theorien von Green und Mac Cullagh, vor allen aber Clark Maxwells elektrodynamische Theorie hervorgehoben.

Wie gezeigt wurde, lässt sich der Nachweis erbringen, dass die auf molekulare Bewegungen zurückzuführenden Bewegungserscheinungen höchst wahrscheinlich sämtlich von einem Primordialmedium, dem Äther, abhängig sind. Es ist damit eine Grundlage für weitere Forschungen gewonnen.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ist aber der Schluss zu ziehen, dass unzweifelhaft das Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte als Ausgangspunkt für die Analyse der verschiedenartigen physikalischen Erscheinungen anzunehmen ist, denn nur durch Zusammensetzung von Kräften, nur durch das Vorhandensein von Wirkung und Gegenwirkung können Erscheinungen hervortreten; der Dualismus, das Gegensätzliche ist die Ursache alles Bestehenden, dessen Zusammenwirken auf dem nie an das Ziel gelangenden Streben nach Ausgleichung beruht. Dynamik ist die Grundlage des Naturgetriebes und der relativ statische Zustand ist nur ein Moment der rastlosen Dynamik. Das Naturwirken beruht auf dauernden Schwingungen, auf Rotationen, auf stets veränderlichen Bewegungsvorgängen, deren variable Periode momentan zum Ausgleich kommt, um den Übergang in die nächste variable Periode zu gewinnen und so fort ohne Aufhören.

---

## Drittes Kapitel.

## Die elektrodynamische Wellentheorie.

47. Das logische Bedürfnis nach einer einheitlichen anschaulichen Gestaltung der Naturvorgänge führte schon frühzeitig die Forscher zur Annahme einer atomistischen Struktur der Materie, wobei man, um einen

Abschluss im Denken zu gewinnen, eine absolute Härte der unendlich kleinen letzten materiellen, durch Stosswirkung sich bethätigenden Elemente voraussetzen musste. Unzweifelhaft ist die Stosswirkung, welche auch von Galilei im Anschluss an antike Ideen als der Ursprung der Kraftwirkung gedacht wurde, die allein anschauliche und darum auch als die allein denkbare Form der Wechselwirkung zu betrachten. Durch die mechanische Wärmetheorie wurde für die kinetische Atomtheorie eine solide Grundlage gewonnen. Während man früher das Ausdehnungsbestreben der Gase vom rein statischen Gesichtspunkte aus auf ein Übergewicht der Abstossungskraft in den Ätheratomen zurückführte, konnte man nach der Erkenntnis, dass die Wärmeerscheinung auf molekularen schwingenden Bewegungen beruhe, jene Vorgänge der Ausdehnung in einer weit befriedigenderen Weise aus der fast unbeschränkten Beweglichkeit der Moleküle im gasförmigen Zustande erklären. So entstand die kinetische Molekulartheorie. Allerdings konnte aber die moderne Physik sich nicht mehr von der Annahme der absolut harten und unteilbaren Atome befriedigt erklären. Darum wurde auch Faraday ein Anhänger jener einfachen, von Boscovich ausgebildeten Atomistik, welche die Substanz in einfache Kraftpunkte auflöst, ohne dabei sich weiter um das dabei noch vorhandene sogenannte materielle Substrat zu kümmern. Somit wurde die aus Kraftpunkten bestehende Masse selbst zur Kraft, und die Ursache der Kraftäusserung lag in den Rotationen, Schwingungen oder Wellenbewegungen der Atome. In der That ist die kreisende oder elliptische Schwingungsbewegung durch die bekannten Beobachtungen der Gebrüder Weber in den Wasserwellen nachgewiesen worden. Nicht allein jedes Wasserteilchen der Oberfläche, sondern auch jedes Wasserteilchen unter der Oberfläche beschreibt nach diesen Beobachtungen während der Wellenbewegung des Wassers einen Kreis beziehungsweise eine Ellipse. Es lag also nahe, in dem das ganze Universum einhüllenden und alle Körper durchdringenden unendlichen Ozean des Äthers ähnliche Bewegungen anzunehmen, wie dies in W. Thomsons Hypothese der Wirbelatome oder in der gyrostatischen Äthertheorie geschehen ist. Durch die elektrische Theorie des Magnetismus war bereits früher die Vorstellungsweise der wirbelartigen Bewegung eines Fluidums zur Anerkennung gelangt, wobei zugleich die als unendlich anzunehmende Fortdauer der auf solchen Bewegungen vorausgesetztermassen beruhenden Kraftwirkung des Magnetismus die Möglichkeit einer Konstanz derartiger Wirbel als annehmbar erscheinen liess. Mit Berücksichtigung derartiger Vorstellungen wurde die Elektrizitätslehre von Faraday umgestaltet.

Vor **Faraday** beschränkten sich die Physiker darauf, bei der Betrachtung elektrischer Vorgänge ihre Aufmerksamkeit auf die Bedeutung der Elektrizitätsleiter zu richten. Nach der üblichen Meinung von damals, die selbst heut noch gewohnheitsmässig gäng und gäbe ist, befindet sich die elektrische Kraft in den geladenen Leitern lokalisiert oder dieselbe wird als Strom von den Leitern transportiert. **Faraday** fasste zuerst den paradox erscheinenden Gedanken, dass die elektrische Kraft in dem isolierenden Medium oder sogenannten Dielektrikum ihren Hauptsitz habe und die Leiter der Wirkung dieses Mediums nur als Grundlage oder Anregungsmittel dienen, indem dieselben der Kraftwirkung Platz geben und eine Kapazität dafür darbieten. Die erfahrungsmässige Wahrnehmung, welche Faradays Beobachtungstalent ins Auge fasste, beruht in der Veränderung, welche sich an dem Kraftleistungsvermögen eines Systems von elektrisierten Körpern vollzieht, wenn das dieselben umgebende Isolierungsmittel oder Dielektrikum verändert wird.

Die zeitgenössischen und selbst neuere Physiker vermochten den geistreichen Gedanken **Faradays** nicht zu fassen und so blieben dieselben gewohnheitsmässig bei der Annahme, dass die Elektrizität auf den Leitern sitze und durch die Leiter fliesse, wie das Wasser durch eine Röhre. Auf spitzfindige Weise wurde versucht, den veralteten Standpunkt dadurch zu rechtfertigen, dass man den Dielektriken eine komplizierte Struktur beilegte und annahm, diese Substanzen seien mit leitenden Teilchen versehen, um deren vom sogenannten leeren Raume verschiedene Wirkungsweise zu erklären.

Die Theorien dieser Art, wie z. B. die von **Poisson**, haben zum mindesten den Nachteil, dass sie nicht mit den Thatsachen in Übereinstimmung zu bringen sind; dieselben sind daher zu verwerfen und sie besitzen nur noch historisches Interesse.

48. Nach den Anschauungen von **Faraday** und **Maxwell**, der Faradays Ideen mathematisch verarbeitete, ist die elektrische Wirkung keineswegs einem besonderen Stoff oder Fluidum zuzuschreiben, sondern die elektrischen Erscheinungen beruhen in der Wirkung des im Dielektrikum vorhandenen oder das eigentliche absolute Dielektrikum bildenden Äthers. Die elektrische Wirkung wird hiernach durch eine Störung des gewöhnlichen relativ statischen Zustandes des Äthers hervorgerufen und beruht in Ätherschwingungen oder Ätherwellen. Diese als elektrische Verschiebung von Maxwell bezeichnete Störung des Gleichgewichtszustandes zwischen Äther und ponderabler Substanz erfolgt in der Richtung der elektrischen Kraft und ihre Grösse ist proportional zur Grösse dieser Kraft und proportional zum spezifischen Kraftleistungsvermögen des Mediums. Wenn der elektrische Zustand einer Änderung

unterliegt, so wird auch die elektrische Verschiebung, oder der damit verknüpfte Spannungszustand im Äther in allen beeinflussten Punkten desselben verändert.

Die Änderung der elektrischen Verschiebung (stress and strains) im Zeitverlauf muss ähnliche Wirkungen hervorbringen, wie dies in Folge der Änderungen dieser Verschiebungen durch einen Elektrizitätsstrom geschieht, der in einem Leiter zur Wirkung kommt. Diese Änderung muss von denselben elektromagnetischen Wirkungen verknüpft sein, wie sie ein solcher Strom erzeugt, und sie muss durch dieselbe Beeinflussung der elektromotorischen Induktionskräfte hervorgerufen werden.

Wenn man annimmt, dass der Verschiebungsstrom dieselben elektromagnetischen Wirkungen ausübt, wie ein gewöhnlicher Elektrizitätsstrom oder ein sogenannter elektrischer Leitungsstrom, so hat man das eine der beiden Maxwellschen Gleichungssysteme, welches in der von Hertz angenommenen Form sich folgendermassen darstellt:

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \\ A\varepsilon\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} \\ A\varepsilon\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$X$, $Y$ und $Z$ bezeichnen in diesen Gleichungen die Komponenten oder Vektoren der elektrischen Kraft in einem Punkte des Dielektrikums, welcher durch die Koordinaten $x, y, z$ bestimmt ist, wobei die Wirkung auf die Zeit $t$ bezogen ist.

$L$, $M$ und $N$ sind die Komponenten oder Vektoren der magnetischen Kraft und $\varepsilon$ ist die dielektrische Konstante des Mediums.

Indem man anderseits annimmt, dass die dielektrische Änderung des magnetischen Kraftfeldes, welche durch einen Verschiebungsstrom hervorgerufen wird, als elektromotorische Induktion zu gelten hat, so erhält man das zweite System der Maxwellschen Gleichungen, welches sich in der folgenden Formulierung darstellt:

$$\left.\begin{aligned} A\mu\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \\ A\mu\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \\ A\mu\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Der Koeffizient $\mu$ bedeutet hier die magnetische Durchdringlichkeit des Mediums.

Wenn man diese beiden Gleichungssysteme mit einander vergleicht, so stellt sich eine vollkommene Symmetrie zwischen den Wirkungsweisen der elektrischen und magnetischen Vektoren heraus. Auf diese Symmetrie wurde von Maxwell ein besonderes Gewicht gelegt.

49. Durch seine tiefsinnigen mathematischen Untersuchungen wurde Maxwell zu der Überzeugung gebracht, dass Elektrizität und Licht qualitativ gleichartige Erscheinungen sind, die auf einerlei Grundursache, nämlich auf einer Wellenbewegung des Äthers beruhen. Durch die genialen Experimentaluntersuchungen von Heinrich Hertz wurde diese Annahme bestätigt und die Berechtigung der Maxwellschen elektromagnetischen Lichttheorie in überzeugender Weise nachgewiesen. In der Geschichte der Physik wurde damit ein Markstein für weitere wichtige Untersuchungen gesetzt, die auch in überraschender Schnelligkeit und Fülle auf dem von Hertz angedeuteten Wege gewonnen worden sind. Alsbald nach Bekanntwerden der Hertzschen Methode für den Nachweis der Fortpflanzung elektrischer Wellen im räumlichen Kraftfelde und dem Nachweis von deren verwandter Natur mit den Lichtquellen wurden allseitig von den Physikern ähnliche Experimente vorgenommen, wodurch die von Hertz entdeckten Thatsachen Bestätigung fanden und dieselben vervollständigt, sowie neue Forschungsergebnisse dazu gewonnen werden konnten. Das Hauptergebnis aber war die von Hertz festgestellte elektrische Optik.

Die Hertzschen Untersuchungen über die elektrischen Wellen stehen in engster Beziehung zu den Ideen Faradays und Maxwells, und in der That bilden diese Ideen die Grundlage zu den Hertzschen Arbeiten.

Hertz versuchte auf dem Wege der Erfahrung die Beziehungen zwischen den Erscheinungen der Polarisation im Dielektrikum und der Wirkungsweise der elektrischen Kräfte zu ergründen, wobei er die Ideen Maxwells über die qualitative Verwandtschaft des Lichts und der Elektrizität bewahrheiten wollte. Er erfand zu dem Zweck seine sinnreiche Untersuchungsmethode, welche ihm gestattete, zum ersten Mal den elektrodynamischen Einfluss nachzuweisen, welchen die sogenannten Verschiebungsströme, die stress and strains Maxwells, ausüben. Dies war sein ursprünglicher Zweck, bei welchem er aber nicht stehen blieb. Die Anwendung seiner Methode führte ihn zu anderen bedeutsamen Folgerungen über die gleichzeitige Fortpflanzung der elektrischen und magnetischen Stromwellen im elektromagnetischen periodisch erregten Kraftfelde. Er gewann dadurch einen tiefen Einblick in die Gesetze der Fortpflanzung der Kraftstrahlen oder der Faradayschen Kraftlinien, durch welche die elektrische Kraft im Äther übertragen wird, und dabei

wurde von ihm der numerische Wert dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit festgestellt, was bei der Grösse dieser Geschwindigkeit eine sehr schwierige Aufgabe war, die er in genialer Weise durch ein einfaches Mittel löste.

Zur Theorie zurückkehrend hob Hertz die wesentlichen Punkte der Maxwellschen Theorie hervor und suchte die tiefsinnigen und oft ziemlich dunkel gehaltenen Aufstellungen dieses geistreichen Vorgängers in volle Klarheit zu bringen.

Nach seinem Ausspruche ist die Theorie Maxwells durch dessen einfaches, symmetrisches (im vorhergehenden Paragraphen aufgeführtes) Gleichungssystem verkörpert, wobei aber von allen besonderen Entwickelungen der Vorgänge abgesehen ist. Durch dieses Gleichungssystem wird insbesondere die Reziprozität zwischen den elektrischen und magnetischen Kraftwirkungen zum Ausdruck gebracht.

50. Von Blondlot wurde die Reziprozität der Wirkungen unter einer sehr klaren Form zum Ausdruck gebracht. Eine elektrische Ladung, welche sich verschiebt, erzeugt ein magnetisches Feld und giebt nach dem von Rowland geführten experimentellen Beweis eine magnetische Verschiebung. Ebenso muss ein sich verschiebender Magnetpol ein elektrostatisches Feld erzeugen; und wenn die beiden Pole, von denen der eine elektrisch, der andere magnetisch ist, dieselbe Verschiebung erleiden, so ergeben sie gleiche Felder, aber — und das ist von grosser Wichtigkeit — Felder von entgegengesetzten Vorzeichen.

Diese Gleichheit der elektrischen und magnetischen Felder und diese Reziprozität konnte in der früheren elektrodynamischen Theorie nicht nachgewiesen werden.

In der früheren Elektrodynamik wurden verschiedene Gesetze für die elektromagnetischen Anziehungen und für die Induktion angenommen. Es ist bezüglich dessen an die Art und Weise zu erinnern, nach welcher man diese Gesetze auf die Bewegungen der Elektrizität in den Dielektriken in Anwendung brachte, denn diese Art und Weise war von derjenigen Maxwells einfach dadurch verschieden, dass man von einer anderen Annahme als Maxwell bezüglich der Dielektriken ausging; um es richtig auszudrücken, muss man sagen, dass man früher nur eine Elektrostatik, aber keine eigentliche Elektrodynamik hatte. Poincaré bemühte sich nachzuweisen, dass man von der Elektrodynamik Maxwells zu der von Helmholtz nur dadurch übergehen kann, dass man der Konstanten, welche die verschiedenen Formeln der elementaren elektrodynamischen Wirkung unterscheidet, einen besonderen Wert beilegt.

Der grosse Unterschied, welcher zwischen den beiden elektrodynamischen oder den beiden elektrostatischen Theorien besteht, liegt darin, dass da, wo Maxwell die Verschiebung einführte, man die Polarisation eingeführt hatte. Wenn man auf den Magnetismus dieselbe Substitution überträgt, so gelangt man dahin, die magnetische Induktion durch die Magnetisierung zu ersetzen, um zur Berechnung der induzierten elektromotorischen Kräfte nicht mehr die Änderung der Induktionsströmung, sondern die Änderung der Magnetisierungsströmung einzuführen.

Welchen Gedankengang Maxwell auch verfolgt haben mag, welche Dunkelheiten und selbst Widersprüche in seinem Werke einem aufstossen mögen und wie viel auch auf die unvollkommene Entwickelung seiner wirklich neuen Begriffe die neue Sprachweise, deren er sich bedient, beigetragen haben mag, so ist doch anzuerkennen, dass das, was bei ihm zum klaren Ausdruck kommt und wodurch er sich von seinen Vorgängern unterscheidet, in der vollkommenen Reziprozität zu finden ist, welche er zwischen der elektrostatischen Wirkung eines variablen magnetischen Feldes und der magnetischen Wirkung eines variablen elektrostatischen Feldes annimmt. Dies ist auch der wesentliche Punkt, an welchen sich Hertz in dem Werke von Maxwell anschliesst.

51. Die Symmetrie der Gleichungen, welche die Reziprozität, die gegenseitigen Verhältnisse, von denen hier die Rede ist, zum Ausdruck bringen, hat eine wichtige Folge.

Wenn man den einen der Vektoren eliminiert, sei es der für Elektrizität oder der für Magnetismus geltende, so erhält man für den anderen Vektor ein Gleichungssystem mit den partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung, nämlich:

$$A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 L}{d t^2} = \triangle L \qquad A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 x}{d t^2} = \triangle X$$

$$A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 M}{d t^2} = \triangle M \qquad A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 y}{d t^2} = \triangle Y$$

$$A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 N}{d t^2} = \triangle N \qquad A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 z}{d t^2} = \triangle Z.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass die Gleichungen der kleinen Bewegungen und die Koeffizienten $\varepsilon$ und $\mu y$ symmetrisch auftreten.

Diese Gleichungen beweisen, dass eine elektrische oder magnetische Störung sich im Medium mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortpflanzt, welche durch den Ausdruck

$$\frac{1}{A \sqrt{\varepsilon \mu}}$$

gegeben ist. Hierbei bedeutet $A$ das umgekehrte Verhältnis $v$ der Einheiten. Man erhält im Besonderen für den leeren Raum, für welchen $\varepsilon$ und $\mu$ gleich Eins, den Wert $\frac{1}{A} = v$, das heisst: diese Geschwindigkeit ist gleich derjenigen des Lichtes. Dieses Ergebnis wurde in der früheren Elektrostatik nicht erhalten, indem neben $\mu$ nicht $\varepsilon$, sondern $\varepsilon - 1$ eingeführt war.

Die Gleichheit der Geschwindigkeit des Lichtes und der Geschwindigkeit der Fortpflanzung der elektromagnetischen Störungen im sogenannten leeren, das heisst „luftleeren" Raum, der aber mit um so wirkungsfähigerem Äther gefüllt ist, ergiebt sich als eine Folgerung der Symmetrie, welche die Gleichungen im Verhältnis zu den spezifischen Koeffizienten darstellen, welche Koeffizienten das Medium hinsichtlich der elektrischen und der magnetischen Wirkungsweise definieren. Diese Gleichheit führt eine ähnliche Symmetrie herbei.

Aus den Hertzschen Versuchsergebnissen konnte diese Gleichheit bewiesen werden.

52. Es ist nicht leicht festzustellen, dass eine Erscheinung sich mit einer endlichen Geschwindigkeit fortpflanzt, und es ist schwierig ausführbar diese Geschwindigkeit zu messen, wenn dieselbe etwa 300 000 Kilometer in der Sekunde beträgt.

Der Gedanke, welcher sich natürlicherweise darbietet, geht dahin, der betreffenden Erscheinung einen periodischen Charakter zu geben und die Wellenlänge zu messen. Die elektrischen Schwingungen sind die schnellsten, welche man bis dahin studiert hatte, sie haben sehr lange Perioden und ergeben Wellen, die mit den üblichen Beobachtungsmitteln gar nicht zu messen sind. In der ersten Hertzschen Abhandlung, welche sich auf diesen Gegenstand bezieht, ist die Beschreibung des Erregungsinstruments enthalten, welches ihm gestattete, Schwingungen von etwa einem Hundertmillionstel Sekunde Schwingungsdauer herzustellen. Die Zeitdauer wird bestimmt durch die sekundären Funken eines Ruhmkorffschen Induktionsapparates, wie mit einer Uhr, die von Zeit zu Zeit aufgezogen wird; der Erreger oder Vibrationsapparat wird von einem kontinuierlichen Funkenstrome durchdrungen und muss dazu dienen, einen ähnlichen Funkenstrom in einem benachbarten Stromkreise gleichfalls in einem Punkte zu unterbrechen. Die erhaltene Wirkung ist komplexer Natur; sie rührt nicht bloss von einem elektromagnetischen Einflusse her und wird nicht ausschliesslich von einer elektrodynamischen Wirkung hervorgerufen. Hertz hat in einer gewissen Anzahl von Einzelfällen den Teil, der auf jede dieser Wirkungen fällt, von den anderen unterschieden.

In dieser ersten Abhandlung wird auch die Wirkungsweise der Resonanz eingehend besprochen; wenn die eine der Grössen, welche den sekundären Stromkreis bestimmen, in kontinuierlicher Weise modifiziert, so kann man das Vorhandensein der Werte beobachten, für welche die sekundären Funken in einer grösseren Weite überspringen, als für alle anderen benachbarten kleineren oder grösseren Werte. Dies ist die Wirkung der Resonanz. Der Resonanzapparat oder Resonator, welcher so gut als möglich auf Übereinstimmung mit dem Vibrationsapparate reguliert ist, hat sich als ein ganz vorzügliches Instrument zur Untersuchung des durch den Erregungsapparat hervorgerufenen elektromagnetischen Feldes erwiesen.

Die Berechnungen, welche Hertz über die geeignete Periode des Erregers und des Resonators angestellt hat, sind keineswegs ganz einwandsfrei. Hertz selbst hat stets offen die ihm nachgewiesenen Fehler zugegeben und stets auf das, was seine Vorgänger bereits gethan hatten, hingewiesen. Seine erste Abhandlung ist bei allen Irrtümern, die sich darin noch befinden, als ein gelehrtes Werk ersten Ranges anzuerkennen; er giebt darin klar und bündig die Mittel an, um eine ganz neue Art von Erscheinungen zu studieren.

Beihergehend ist hier auch der Nachweis der induzierenden Wirkung eines geradlinigen nicht geschlossenen Stromkreises auf einen anderen nicht geschlossenen Stromkreis hervorzuheben.

Im Weiteren studierte Hertz den Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die Funken; indem er alsdann dieses neue Feld von Forschungen Anderen zur weiteren Bearbeitung überliess, beschäftigte er sich eingehend mit dem Studium der aktino-elektrischen Erscheinungen und ging dann auf die Untersuchungen der elektrischen Schwingungen zurück. Er zeigte, dass die Gegenwart eines isolierenden Körpers von grossen Dimensionen in der Nähe eines Sekundärstromkreises die Bedingungen der Resonanz verändert, indem dadurch eine Störung in derselben Weise wie durch die Gegenwart eines elektrisch leitungsfähigen Körpers hervorgerufen wird. Es ist dies allerdings nur ein indirekter Beweis dafür, dass die Verschiebungsströme, welche in dem Dielektrikum durch elektrische Schwingungen hervorgerufen werden, bei ihrem Verlauf über den Strom in dem Sekundärstromkreise eine Reaktion hervorgerufen haben. Die Wichtigkeit dieses Resultats ist aber anzuerkennen, wenn man bedenkt, dass zum Beweis des Vorhandenseins einer elektromagnetischen Wirkung der Verschiebungsströme bisher nur der sehr interessante, aber immerhin wenig beweiskräftige Versuch von Röntgen vorgelegen hat*).

*) Poincaré, „Electricité et Optique“, t. I, p. 303.

In der Abhandlung über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Wirkungen, welche am 2. Februar 1888 der Berliner Akademie vorgelegt wurde, und in der darauf folgenden Abhandlung über die elektrodynamischen Wellen in der Luft und deren Reflexion beginnt das wirkliche Studium, dessen Ergebnis man als die Hertzianischen Schwingungen bezeichnet. Es wird darin die Fortpflanzung der elektrischen Wellen längs eines von Luft umgebenen Drahtes behandelt und ein Vergleich der Fortpflanzung längs eines Drahtes mit der Fortpflanzung im Dielektrikum selbst angestellt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs des Drahtes war von Hertz dadurch irrtümlich berechnet worden, dass er anstatt des Faktors $\sqrt{2}$ den Faktor 2 eingeführt hatte. Dieser Fehler war von Lodge und Poincaré nachgewiesen, und dadurch gezeigt worden, dass diese Geschwindigkeit nahezu gleich der Geschwindigkeit des Lichtes ist. Die Geschwindigkeit in der Luft, welche viel schwieriger zu messen ist, zeigte sich von der Geschwindigkeit längs des Drahtes verschieden.

53. Durch die in grösserem Massstabe angestellten Experimente von Sarasin und de la Rive wurde die Frage gründlich entschieden und die Gleichheit zwischen den Geschwindigkeiten in der Luft und längs des Drahtes festgestellt; auch andere Versuchsresultate stimmen damit überein, so dass also die Richtigkeit der Maxwellschen elektromagnetischen Lichttheorie als zweifellos anerkannt werden muss.

Die Schnelligkeit, mit welcher die merkwürdigen Arbeiten aufeinanderfolgten, welche die anfangs angezweifelten Ergebnisse bestätigten, haben fast den Zeitpunkt in Vergessenheit gebracht, wo man zu befürchten hatte, dass die Hertzche Theorie eine nicht besonders solide Grundlage habe und wohl in sich zusammenfallen werde. Nach der Entdeckung der mehrfachen Resonanz durch Sarasin und de la Rive und vor der Erklärung dieser Anomalie seitens Poincarés und Byerknes', überhaupt vor der Zeit, wo durch Blondlot die Grundlagen der Versuche in der überzeugendsten Weise festgestellt worden waren, wurde von vielen Physikern die Richtigkeit der Ergebnisse der Hertzschen Versuche in Folge der Beschränktheit des Gedankenganges und wohl auch öfters in Folge des Neides und der Selbstsucht stark angezweifelt.

Wenn man aber auch damals über den numerischen Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft und selbst über das Vorhandensein einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit Bedenken erheben konnte, so musste man doch immerhin gegen Ende des Jahres 1888 zugeben, dass eine Anzahl wichtiger Thatsachen festgestellt worden

waren. Es war der Nachweis geliefert worden, dass Licht und elektromagnetische Kraftwirkung sich in Strahlen fortpflanzen und dass die Strahlen der elektrischen Kraft den Gesetzen der Optik genügen. Indem das Hertzsche Schwingungsinstrument, der Vibrator in der Fokallinie eines parabolischen Spiegels aus Zink fortbewegt wurde, vergrösserte sich in enormen Verhältnissen die Entfernung, in welcher man Wirkungen wahrzunehmen vermochte.

Ein Resonanzapparat, welcher in einer Entfernung von 2 Meter vom Vibrator keine Funken abgab, entwickelte Funken auf 16 Meter Entfernung, sobald man Vibrator und Resonator mit zwei parabolischen in derselben Achse gegeneinander gerichteten Reflektoren verband. Die Fortpflanzung des einen Reflektors zum anderen vollzieht sich dabei geradlinig, die Zwischenschaltung einer Holzplatte hebt diese Fortpflanzung nicht auf, wohl aber wird diese Fortpflanzung verhindert, wenn sich der Beobachter selbst in die Achsiallinie der beiden Reflektoren stellt. Eine Veränderung der Richtung um 15°, welche man dem einen Reflektor gab, brachte dieselbe Vernichtung der Fortpflanzung hervor. Hertz beobachtete selbst die Reflexion auf einen schrägstehenden Spiegel, die Polarisation auf ein System von Leitern und die Brechung durch ein Prisma von Asphalt.

Indem man mit elektrischen Schwingungen von sehr kurzer Periode Lichterscheinungen hervorbrachte, wies er die qualitative Identität der elektrischen Schwingungen mit den Lichtschwingungen nach. Seine Versuche über die stehenden elektrodynamischen Wellen haben die Versuche über die stehenden Lichtwellen hervorgerufen. Wenn man ein Bündel paralleler elektrischer Kraftstrahlen oder Kraftlinien auf eine Zinkplatte senkrecht auffallen lässt, erhält man Systeme von Knotenflächen und Ausbauchungsflächen, wie man solche mit Schallröhren in der Akustik nachweisen kann; die Knoten oder Neutralpunkte der elektrischen Kraft stimmen mit den Ausbauchungen oder Kraftpunkten der magnetischen Kraft und die Knoten der magnetischen Kraft mit den Ausbauchungen der elektrischen Kraft überein. Gegen den leitenden Spiegel wird ein Knoten der elektrischen Kraft wirksam.

54. Die elektrische Kraft und die magnetische Kraft stehen in jedem Punkte ihrer Richtungen rechtwinklig zu einander. Hertz giebt in seiner Abhandlung einen sehr sinnreichen experimentellen Beweis über die mechanische Wirkung der elektrischen Wellen in Drähten.

Zwischen zwei vertikalen Kupferdrähten, welche der Sitz der elektro-stationären magnetischen Störungen sind, kann man eine Art Drahtkäfig anbringen, in welchem man einen sehr leichten Cylinder aus Goldpapier aufhängt. Wenn dieser Cylinder mit seiner Achse sich

nicht in der Vertikalebene der beiden Drähte befindet, so wird er in diese Richtung eingelenkt; die Ablenkung ist im Maximum in den Punkten, welche den Ausbauchungen der elektrischen Kraft entsprechen; sie ist Null in den Knotenpunkten, und zwischen diesen Punkten ändert sie sich regelmässig.

Um die magnetisehe Kraft zu studieren, hängt man in demselben Käfig einen leichten Ring aus Aluminiumdraht auf, welcher sich unter der Einwirkung eines oszillierenden magnetischen Kraftfeldes befindet; dieser Rahmen muss eine zur magnetischen Kraft parallele Richtung annehmen. Wenn man den kleinen Käfig in einen Punkt bringt, wo sich ein Knoten der elektrischen Kraft befindet, um die elektrostatische Wirkung auf den Aluminiumring zu eliminieren, so wird eine Ablenkung des Ringes bemerklich und seine Ebene sucht sich rechtwinklig zur Ebene der beiden vertikalen Leitungsdrähte einzustellen. In diesen Punkten tritt ein Maximum der Wirkung ein. Die magnetische Kraft befindet sich daher im Maximum in denjenigen Punkten, wo die elektrische Kraft sich im Minimum befindet, und diese beiden Vektoren stehen senkrecht auf einander. Die beiden Kräfte üben daher mechanische Wirkungen von gleicher Grössenordnung aus.

Die Analogie mit den beiden Vektoren, welche die Lichtschwingung darstellen, ist daher, zufolge der Annahmen von Fresnel und Neumann, im engsten Zusammenhange mit dem gegenseitigen Verhältnis der Vektoren der Elektrizität und des Magnetismus. Diese Analogie hat weitere Bestätigung gefunden teils durch die Versuche, welche von Klemencic und Trouton über die Polarisation der elektromagnetischen Wellen durch Reflexion an der Oberfläche der Dielektriken, wie Glas und Schwefel, angestellt worden sind, andernteils aber auch noch durch die bemerkenswerten Versuche von Otto Wiener. Als das geometrische Produkt der beiden elektrischen und magnetischen Vektoren tritt der strahlende Vektor von Poynting, dessen Richtung und Grösse in einem Punkte des Raumes genügend ist, um den Kraftstrom deutlich zu erkennen, welcher sich durch ein Element irgend einer durch den gegebenen Punkt gehenden Fläche fortpflanzt. Die leuchtenden Vektoren, sowie die elektrischen und magnetischen Vektoren sind bei raschen Schwingungen transversal.

Die kühne Hypothese, welche die leuchtenden Schwingungen auf elektromagnetische Schwingungen von äusserst kurzer Periode reduziert, ist nunmehr erfahrungsmässig begründet, immerhin kann man noch nicht eigentlich behaupten, dass sie erfahrungsmässig bewiesen sei; aber man ist nunmehr im Besitz einer Methode, welche gestattet die Folgerungen dieser Hypothese experimentell zu kontrollieren und bis jetzt haben die Arbeiten von Hertz und seinen Nachfolgern eine sehr

befriedigende Übereinstimmung wenigstens im grossen Ganzen gezeigt. Wenn die Übereinstimmung sich auch in der weiteren Verfolgung der Untersuchungen bewährt, so ist den Forschern ein wunderbares Instrument in die Hand gegeben, welches gestattet den Mechanismus der Lichterscheinungen zu studieren, indem man diese Erscheinungen in ungeheurer Vergrösserung hervorbringt; schon jetzt hat Righi die Hertzianischen Schwingungen zum Studium der totalen Reflexion in Anwendung gebracht.

Andere optische Erscheinungnn, wie z. B. die Diffraktion, werden natürlich erklärt werden, sobald man dieselben Erscheinungen im Gebiete des Elektromagnetismus kennen gelernt hat.

Wenn auch noch von mancher Seite die elektromotorische Theorie Maxwells mit einiger Zurückhaltung in Betracht gezogen wird, so muss doch wohl allgemein anerkannt werden, dass die Arbeit von Hertz von fundamentaler Wichtigkeit ist. Er hat zuerst beobachtet, dass die Fortpflanzung der elektromagnetischen Wellen in der Luft mit endlicher Geschwindigkeit stattfindet. Diese Geschwindigkeit ist die des Lichtes, wie die Versuche von Sarasin und de la Rive, sowie diejenigen von Blondlot bewiesen haben. Hertz hat die Ungenauigkeit der Elektrodynamik Maxwells nachgewiesen, insoweit sich dieselbe der älteren Elektrodynamik gegenüberstellt. Er war ein grosser mit Erfindungsgeist begabter Experimentator und gleichzeitig ein tiefer Denker, er erfasste die Ideen des grossen englischen Physikers und setzte dessen Werk fort. Poincaré hat Maxwell als einen Säemann von Ideen bezeichnet. Maxwell hat gesäet und Hertz hat diese Ideen zur Reife gebracht.

55. Die Identität der spezifischen elektrostatischen Kapazität und der Dichte des Äthers ist von Edwin J. Houston und A. E. Kennelly nachgewiesen worden*). Die bezügliche Folgerung aus Maxwells elektromagnetischer Lichttheorie scheint vorher noch nicht bemerkt worden zu sein oder ist wenigstens nicht allgemein bekannt geworden.

Unter der Voraussetzung, dass die magnetische Durchdringlichkeit der durchsichtigen Dielektriken fast gleich derjenigen des Äthers im freien Raume ist, hat Clark Maxwell als notwendige Folgerung aus seiner elektromagnetischen Lichttheorie die Vermutung aufgestellt, dass die spezifische elektrostatische Kapazität eines isotropen dielektrischen Mediums gleich der zweiten Potenz seines Refraktionsindexes für Strahlen von grösster Wellenlänge sein muss.

---

*) The Electrician, 30. März 1894.

Diese Mutmassung hat sich für eine grosse Anzahl von durchsichtigen Dielektriken, festen sowohl wie auch flüssigen, als richtig erwiesen mit der bemerkenswerten Ausnahme der animalischen und vegetabilischen Öle.

Man weiss aber, dass der Refraktionsindex einer Substanz für eine gegebene Wellenlänge gleich dem Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen im freien Raume zur Geschwindigkeit im Innern der betrachteten Körper ist, und die Erfahrung hat gezeigt, dass es der Äther ist, welcher im Innern einer durchsichtigen oder durchscheinenden Substanz das Licht überträgt, und dass die Moleküle der Substanz dabei nur mehr oder minder beteiligt sind.

Der Mechanismus, durch welchen der Äther die strahlende Kraftwirkung überträgt, ist zur Zeit noch unbekannt, auch wenn man annimmt, dass er elektromagnetischer Natur ist, und zwar ist diese Kraftwirkung deshalb unbekannt, weil man über die Natur des Äthers selbst noch keine bestimmte Kenntnis hat, wenn darüber auch geistreiche Hypothesen von mehr oder minder grosser Wahrscheinlichkeit aufgestellt worden sind. Von Fizeau*) ist im Jahre 1859 experimentell nachgewiesen worden, dass die Ergänzungsgeschwindigkeit, welche dem einen durchsichtigen in Bewegung befindlichen Körper durchdringenden Lichte mitgeteilt wird, nicht gleich der Komponente ist, welche sich aus der Bewegung des Körpers in der Richtung der Lichtübertragung ergiebt, sondern nur einem Bruchteile $\frac{n^2-1}{n^2}$ dieser Komponente entspricht, wobei $n$ den Refraktionsindex bezeichnet. Dieses Ergebnis der mehrfach angestellten Versuche wurde im Jahre 1886 durch Michelson und Marley bestätigt.

Die natürliche Auslegung dieser Beobachtung scheint zu zeigen, dass der Äther im Innern der Körper dichter ist als im freien Raume und dass seine mittlere Dichte durch die zweite Potenz des Brechungsindexes ausgedrückt wird. Diese Beziehung ist auch in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Formel für die Übertragung einer Störung in materiellen Körpern, indem $v$ proportional zu $\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$ ist, wobei $\varepsilon$ die Elastizität und $D$ die Dichte bezeichnet.

Wenn man annimmt, dass dieses Versuchsergebnis richtig ist, so folgt daraus, dass die Zahl, welche die spezifische elektrostatische Kapazität eines Körpers darstellt, gleich sein muss der Zahl, welche

*) Annales de Chimie et Physique (III) t. LVII, p. 385, 1859.

der mittleren Dichte des in diesem Körper befindlichen Äthers entspricht. In der gewöhnlichen Schreibweise hat man

$$n = \frac{1}{\sqrt{K\mu}} \text{ und für } \mu = 1 \qquad n^2 = K;$$

und ausserdem, weil $D = n^2$ ist, auch $D = K$.

Wenn der Äther Trägheit besitzt, so scheint diese Beweisführung für die Ansicht zu sprechen, dass die elektrostatischen Verschiebungen und Spannungen kinetischer Natur sind, das heisst: als Schwingungen betrachtet werden müssen oder auch als Wirbelbewegungen der Ätherteilchen zu gelten haben. Wenn aber andernteils dem Äther keine Trägheit zukommt, so kann dieser Beweisgrund zur Verteidigung der entgegengesetzten Meinung dienen.

Eine andere Schlussfolgerung aus der Maxwellschen Theorie und den Erfahrungsresultaten Fizeaus wird die sein, dass die Krystalle nach verschiedenen Richtungen verschiedene Ätherdichtigkeiten besitzen.

Nach den Untersuchungen von Klemencic besitzt der Äther in verschiedenen Körpern die folgenden Dichtigkeiten:

| | |
|---|---|
| Luft | 1000293 |
| Wasserstoff | 1000132 |
| Kohlensäure | 1000492 |
| Kohlenoxyd | 1000347 |
| Stickstoffdoppeloxyd | 1000579 |
| Ölbildendes Gas | 1000729 |
| Sumpfgas | 1000476 |
| Schwefelkohlenstoff | 1000450 |
| Schwefelsäure | 1000770 |
| Schwefeläther | 1003720 |
| Äthylchlorür | 1007760 |
| Äthylbromür | 1007730 |

56. Von besonderem Interesse sind die neueren Untersuchungen Vaschys über die Umwandlung mechanischer Kraftleistung in elektrische Kraftleistung, über die Natur elektrischer Leitungsfähigkeit und über die Berechnung der Kräfte, denen die Körper im elektromagnetischen oder magnetischen Felde ausgesetzt sind.

Wir betrachten zuerst die Art der Umwandelung mechanischer Kraftleistung in elektrische Kraftleistung *).

Nach dem von Maxwell aufgestellten Gesetz hat die in der Volumeneinheit eines elektrischen Feldes vorhandene Kraftgrösse den

*) Comptes rendus t. CXVIII, p. 1249.

Wert $w = \frac{h^2}{8\pi k}$, wobei $h$ die Feldstärke in dem Punkte bezeichnet, wo die Volumeneinheit vorhanden gedacht ist und $\frac{1}{k}$ der spezifischen induktiven Kraft des Dielektrikums entspricht.

Andernteils ist die Oberfläche eines Leiters in einem stabilen elektrischen Felde, wie diejenigen sind, welche man in der Elektrostatik studiert hat, in dem Teil des umgebenden Mediums normalen Kräften oder Spannungen unterworfen, welche demselben Werte $p = \frac{h^2}{8\pi k}$ für die Flächeneinheit entsprechen.

Unter diesen Voraussetzungen ist ein Leiter zu betrachten, welcher sich in einem elektrischen Felde verschiebt, welches durch einen Punkt $C$ an der Stelle $C'$ während einer unendlich kleinen Zeit geht. Der anstossende Teil seiner Oberfläche erfüllt das Dielektrikum, welches somit ein Volumen $n_1$; am hinteren Teile giebt im Gegenteil dem Dielektrikum ein Volumen $n_2$ gleich $n_1$ frei.

In der Region $n_1$ beschreibt ein Element $dS$ der Oberfläche des Leiters ein Volumen gleich $dS.dn$, wobei $dn$ die normale Komponente der Verschiebung bezeichnet. Die normale Spannung $p\,dS$, welche das dielektrische Medium auf dieses Element während der Verschiebung ausübt, erzeugt eine positive Kraftleistung gleich $p\,dS.dn$ in derselben Zeit, in welcher die Kraftwirkung $w\,dS.dn = p\,dS.dn$, welche sich in dem vertriebenen Volumen $dS.dn$ befindet, verschwindet. Es folgt daraus, dass die der Verschiebungsarbeit des Leiters in der Region $n_1$ äquivalente Kraftleistung an dieser Stelle durch das Dielektrikum geliefert wird. Mit anderen Worten: die vom Dielektrikum auf den Leiter ausgeübte Kraftleistung ist nichts anderes, als die unter der Form von Elastizität oder einer anderen Kraft abgegebene elektrische Kraftleistung, welche in dem durch das Dielektrikum abgetretenen Volumen vorhanden ist.

In der Region $n_2$ dagegen ist die vom Dielektrikum geleistete Kraftwirkung negativ, weil die normale Verschiebung $dn$ zur Spannung $p\,dS$ umgekehrt gerichtet ist. Gleichzeitig wird in dem Volumen $dS.dn$, welches auf dem Leiter gewonnen worden ist, eine Kraftgrösse

$$w\,dS.dn = p\,dS.dn$$

erzeugt.

Somit sind in der Region $n_2$ die äusseren Kräfte gleich und entgegengesetzt den elektrischen Kräften, welche eine positive Arbeit hervorbringen, und die Kraftleistung verwandelt sich an der Stelle in elektrische Kraft.

Während dieser lokalen Umsetzung der latenten Kraft in wirksame Kraft und der wirksamen Kraft in latente Kraft tritt die übrige elektrische Kraft nicht mit in das Spiel, sondern bleibt unverändert. Jedes Mal, wenn die Stellung der äquipotentiellen Fläche des Leiters eine Änderung erleidet, kann der elektrische Zustand des primitiven Feldes nicht fortbestehen und es sucht sich ein neuer stabiler Zustand entsprechend der neuen Stellung des Leiters zu bilden. Daher findet eine Störung statt, deren Wirkung die Verteilung unendlich wenig modifiziert, aber nicht auf die Summe der elektrischen Kraftwirkung im übrigen Felde einwirkt.

Der einzige Fall, wo die Verschiebung des Leiters keineswegs den elektrischen Zustand des Feldes ausserhalb des durch seine Oberfläche verdrängten Volumens verändert, ist dann vorhanden, wenn dieser Leiter, anstatt eine unveränderliche Form beizubehalten, allmählich so deformiert wird, dass seine Oberfläche allmählich die Form der verschiedenen Äquipotentialflächen des ursprünglichen Kraftfeldes einnimmt; die der Verschiebung der Oberfläche entsprechende mechanische Kraftleistung ist genau äquivalent der in dem durch diese Oberfläche verdrängten Volumen verschwundenen Kraftgrösse. Um diesen Fall theoretisch zu verwirklichen, muss man sich einbilden, dass der Leiter auf eine durch geeigneten Druck auf die innere Wandung beliebig ausdehnbare dünne Haut reduziert ist.

Die Verschiebung eines dielektrischen Körpers im Kraftfelde bringt eine kompliziertere elektrische Störung hervor, als diejenige, welche von der Verschiebung eines Leiters in diesem Kraftfelde hervorgebracht wird. Die durch die äusseren Kräfte hervorgebrachte Kraftleistung setzt sich an der Stelle noch in eine äquivalente Grösse $\delta W$ elektrischer Kraft um, aber von dieser Kraftgrösse $\delta W$ bleibt nur ein Teil an dieser Stelle; dieser sitzenbleibende Teil wird durch $\delta W - \delta' W$ ausgedrückt; derselbe wird allmählich auf das übrige Kraftfeld übertragen. Die Rechnung zeigt in der That, dass, sobald der neue stabile Zustand des Feldes bei der neuen Lage des verschobenen Körpers erreicht ist, das Wachstum $\delta' W$ der Kraftgrösse in den Regionen $U_1$ und $U_2$ im allgemeinen von $\delta W$ verschieden ist.

Der Vorgang ist derselbe, wenn ein Magnet in einem nur durch Magnete erzeugten magnetischen Felde verschoben wird; die Leistung der äusseren Kräfte während dieser Verschiebung wird alsdann auf der Stelle in eine äquivalente Grösse $\delta W$ magnetischer Kraft umgesetzt. Nur ein Teil $\delta' W$ dieser Kraft dient zur Verstärkung der lokalen Kraftgrösse; der Überschuss $(\delta W - \delta' W)$ verteilt sich in dem übrigen Felde, gerade so wie in dem Falle der Verschiebung eines Dielektrikums.

Bei dem Magnetismus ist kein ähnlicher Fall vorhanden wie bei der Verschiebung eines Leiters, wie derselbe vorher besprochen worden ist, weil keine magnetische Leitungsfähigkeit existiert.

57. Was die Natur der elektrischen Leitungsfähigkeit betrifft, so stellt Vaschy*) darüber die folgende Betrachtung an:

In der auf das Vorhandensein und die Eigenschaften des elektrischen Fluidums begründeten Theorie wird ein Strom als eine Strömung der Elektrizität angesehen, welcher Strömung die verschiedenen Körper einen mehr oder minder grossen Widerstand entgegenstellen.

Wenn man von dieser Voraussetzung absieht, so genügt die Prüfung der verschiedenen bekannten Thatsachen, um die Natur des elektrischen Stromes und den Grund, aus welchem seine Wirkung sich auf die Aussenseite der Leiter ausdehnt, klarzulegen.

Das durch einen elektrisierten Körper in dem isolierenden Medium geschaffene Feld, welches diesen Körper umgiebt, dringt nicht in das Innere der Leiter ein; aber durch plötzliche Annäherung des elektrisierten Körpers kann man in mittleren Leitern ein elektrisches Feld hervorrufen, welches sich zu zerstreuen sucht und mehr oder minder rasch verschwindet.

Diese Wirkungsweise deutet unzweifelhaft an, dass diese Eigenschaft allen Leitern zukommt, wenn auch natürlicher Weise den verschiedenen Substanzen, aus denen die Leiter bestehen, ein verschiedenes spezifisches Leitungsvermögen zukommt, indem zum Beispiel die Luft dieses Leitungsvermögen wenigstens im trockenen Zustande in höchst geringem Masse besitzt. Es scheint daher, dass die sogenannte Leitungsfähigkeit oder das Leitungsvermögen eines Körpers in einer Neigung des in diesem Körper hergestellten elektrischen Kraftfeldes zur mehr oder minder raschen, oft schon in unmerklich kurzer Zeit sich vollziehenden Zerstreuung beruht.

Diese Idee wird bestätigt und genau festgestellt durch das Studium der elektrischen Ströme. In der That kann sich kein elektrisches Kraftfeld in einem permanenten Zustand in einem Leiter behaupten, in Folge einer unaufhörlichen Abgabe einer elektrischen Kraftgrösse, die nach dem Jouleschen Gesetz der entwickelten Wärmemenge äquivalent ist. Dieses Gesetz kann folgendermassen formuliert werden:

Die Grösse $q$ der in der Zeiteinheit im Volumen eines Leiters entwickelten Wärme ist für einen Punkt, in welchem die Intensität des elektrischen Kraftfeldes gleich $h$ ist, aus-

*) Comptes rendus, t. CXVIII, p. 1824.



zudrücken durch die Formel $\frac{h^2}{\varrho}$, worin $\varrho$ den spezifischen Widerstand des Leiters bezeichnet.

Wenn man die Grösse der in einem endlichen Volumen $U$ während einer unendlich kleinen Zeit $dt$ entwickelten Wärme betrachtet, so kann diese Grösse nur ein Bruchteil der in demselben Volumen enthaltenen elektrischen Kraft sein, welche sich durch Umwandlung in Wärme zerstreut. Diese Wärmegrösse wird in der That nur der elektrischen Kraft entlehnt werden, welche sich in der nächsten Umgebung des äusseren Kraftfeldes bei $U$ befindet, denn während der unendlich kleinen Zeit $dt$ kann die dem Volumen $U$ von aussen zugesendete Kraftgrösse nur bis zu einer unendlich geringen Tiefe $v\,dt$ eindringen, wobei $v$ die Geschwindigkeit der Fortpflanzung bezeichnet, welche unzweifelhaft endlich ist, das heisst einer gewissen wenn auch noch so kleinen Grösse entspricht.

Ausserdem hat die in der Einheit des Volumens enthaltene elektrische Kraft des Feldes, welche durch den Wert $w = \frac{h^2}{8\pi k}$ ausgedrückt wird, nur ein bestimmter Bruchteil der in derselben Volumeneinheit entwickelten, in Joule-Einheiten ausgedrückten Wärmemenge $q$, denn es gilt die Beziehung

$$q = \frac{h^2}{\varrho} = \frac{h^2}{8\pi k} \cdot \frac{8\pi k}{\varrho} = \frac{2}{\Theta} w,$$

wobei $\Theta$ durch die Beziehung $\varrho = 4\pi k \Theta$ definiert ist, und wie $k$ und $\varrho$ als ein spezifischer Koeffizient des Leiters zu gelten hat; dieser Koeffizient $\Theta$ ist vergleichbar einer Zeit.

Man kann die vorstehende Formel auf folgende Weise in Worten ausdrücken: Die elektrische Kraft $w$, welche unaufhörlich durch eine Kraftzufuhr von aussen erneuert wird, zerstreut sich vollständig als Wärme in einer Zeit, die durch $\frac{\Theta}{2}$ gegeben ist und welche kleiner als $10^{-6}$ Sekunde für gewisse Leiter zu sein scheint, während sie für Dielektrika den Wert von $10^6$ Sekunde und darüber erreicht.

Dieses Gesetz drückt die Neigung des elektrischen Feldes aus, sich in den Leitern zu zerstreuen, sobald die Kraftverluste nicht ersetzt werden. Dies ist der Fall bei der langsamen Entladung eines Kondensators, sobald sein Dielektrikum etwas leitungsfähig ist. Wenn dieses Dielektrikum homogen ist, so wird die elektrische Kraft jedes Volumenelementes während der Zeit $dt$ durch kalorische Zerstreuung um einen gleichförmigen Bruchteil $\frac{2\,dt}{\Theta}$ reduziert. Da diese Kraftgrösse proportional

der zweiten Potenz der Kraftstärke $h$ des Feldes ist, so wird $h$ durchgängig um denselben Bruchteil $\frac{dt}{\Theta}$ vermindert werden, wodurch keinesfalls die Äquipotentialfläche verändert und der elektrostatische Gleichgewichtszustand des Feldes nicht gestört wird. Man hat daher

$$\frac{dh}{h} = -\frac{dt}{\Theta},$$

woraus folgt

$$h = h^{\Theta} e^{-\frac{t}{\Theta}}.$$

Somit wird das elektrostatische Kraftfeld nach einem exponentiellen Gesetze abgeschwächt.

Es wird nicht mehr dasselbe sein, wenn $\Theta$ von einem Punkte zum andern Punkte des Dielektrikums sich veränderte, denn wenn die relative Abschwächung der elektrischen Energie und infolgedessen der Feldstärke $h$ in den verschiedenen Punkten des Feldes ungleichförmig wäre, so würde der elektrostatische Gleichgewichtszustand beständig abgeschwächt werden. Es würde sich ein neuer Gleichgewichtszustand herzustellen suchen, indem die vorher weniger abgeschwächten Teile des Kraftfeldes den in ihnen vorhandenen Kraftüberschuss nach den abgeschwächteren Teilen senden. Wenn zum Beispiel ein Teil des Dielektrikums vollständig isolierend und somit $\Theta = \infty$ wäre, so würde dessen ganzer Kraftinhalt in die leitenden Teile übergehen.

Ein Strom wird permanent werden, wenn der von aussen kommende elektrische Kraftzufluss in jedem Volumenelement des Leiters den Verlust, welcher durch die Wärmeausstrahlung entsteht, aufhebt.

Alles zusammengefasst ist zu sagen, dass ein Strom, mag er permanent oder variabel sein, durch die folgenden zwei übereinander gelagerten Vorgänge gebildet wird:

1. durch die lokale Umwandlung der elektrischen Kraftgrösse in Wärme.
2. durch Kraftübertragung zwischen der elektrischen Kraftquelle (galvanische Batterie, Dynamomaschine u. s. w.) und dem Verbrauchsort, welche Übertragung hervorgerufen wird durch die Neigung des Kraftfeldes, in einen Gleichgewichtszustand überzugehen, oder einen Gleichgewichtszustand zu behaupten. Der einzige Fall, wo diese Übertragung nicht stattfindet, ist derjenige, wo es sich um einen Kondensator mit einem homogenen Dielektrikum handelt, worauf schon oben hingewiesen wurde.

Es ist hierbei nur der lokale Vorgang ins Auge gefasst worden, welcher sich nach dem Jouleschen Gesetze regelt.

In dem Magnetismus ist keine Leitungsfähigkeit vorhanden, das heisst, das durch einen permanenten Magnet oder durch einen elektrischen Strom erzeugte magnetische Kraftfeld erhält sich für unendlich lange Zeitdauer in allen benachbarten Körpern. Die magnetische Energie hat daher kein Bestreben sich unter der Form von Wärme in den Körpern zu zerstreuen. Hierin liegt ein merkwürdiger Unterschied zwischen den Eigenschaften der elektrischen und der magnetischen Kraftäusserung.

58. Es ist nun an eine von Maxwell aufgestellte Theorie zu erinnern, welche der neueren Elastizitätstheorie ähnlich ist und welche sich auf den schon von Faraday verfolgten Gedankengang stützt. Auf Grund dieser Theorie hat Vaschy*) die Kräfte berechnet, denen die in einem elektromagnetischen oder magnetischen Felde befindlichen Körper unterworfen sind. Es wird dabei die Fortpflanzung der elektrischen Kräfte unter der Voraussetzung in Betracht gezogen, dass dieselben sich allmählich durch ein dielektrisches Medium**) und nicht durch den leeren Raum durch sogenannte Fernewirkung fortpflanzen. Die von Vaschy auf Grund dieser Anschauung gewonnenen Ergebnisse sind von hohem Interesse, so dass dieselben in Erinnerung zu bringen sind.

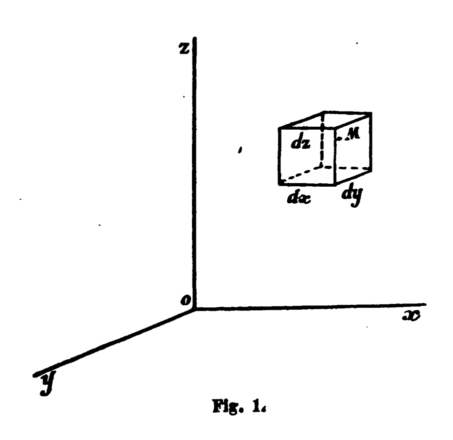


Fig. 1.

Wenn man eine beliebig angenommene Oberfläche $S$ betrachtet, welche sich in einem elektrischen Kraftfelde befindet, so sind die von dieser Oberfläche umgrenzten Volumenelemente durch die Einwirkung des inneren Kraftfeldes Spannungen unterworfen, welche auf jeden Punkt der Oberfläche einwirken und durch die folgenden Bedingungen bestimmt sind:

Diese auf die Flächeneinheit der Oberfläche in irgend einem Punkte einwirkende Spannung hat eine derartige Richtung, dass der die Richtung des Kraftfeldes im Punkte $M$ darstellende Vektor der Halbierungslinie des Winkels entspricht, welcher durch die Richtung dieser

*) Comptes rendus, 7. Nov. 1898.
**) Maxwell, Traité d'Electricité et de Magnétisme § I, chap. V, p. 168.

Spannung und die Richtung der von aussen auf dieser Fläche stehend gedachten Normalen bestimmt wird.

Die Grösse dieses Vektors ist nur abhängig von der spezifischen Induktionskraft $K$ und von der Richtung des Kraftfeldes in dem betrachteten Punkte; die Grösse dieses Vektors wird demnach ausgedrückt durch die Formel:

$$v = K \frac{F^2}{8\pi}.$$

Hierdurch ist das Gesetz formuliert, welches von Vaschy aufgestellt worden ist, um daraus den allgemeinen Ausdruck der Kraft $F$ abzuleiten, welche auf die Volumeneinheit in irgend einem Punkte des Feldes ausgeübt wird.

Es ist nun ein den gedachten Punkt $M$ umgrenzendes unendlich kleines Parallelepiped von dem Volumen $dv$ in Betracht zu ziehen, dessen Flächen zu den Achsen $x, y, z$ des angenommenen Koordinatensystems parallel sind, wie dies in dem Diagramm Fig. 1 S. 104 dargestellt ist.

Die Kraft $Fdv$, welche auf dieses Parallelepiped ausgeübt wird, ist unzweifelhaft die Resultante der auf die Oberfläche, das heisst auf die sechs Flächen dieses Parallelepipeds einwirkenden Spannungen. Es ist nun anzunehmen, dass die Oberfläche dieses Parallelepipeds der vorher gedachten Oberfläche $S$ entspreche.

Es mögen nun $p_{xx}$, $p_{yx}$ und $p_{\chi x}$ die in der Richtung der Koordinatenachse $ox$ angenommenen auf die Flächeneinheit der drei in einer Ecke des Parallelepipeds zusammenstossenden Flächen des Parallelepipeds einwirkenden Spannungen sein.

Es sind alsdann die zur Koordinatenebene $yz$ parallelen Flächen des Parallelepipeds in Betracht zu ziehen. Die auf diese beiden Flächen einwirkenden Spannungen sind, wenn man die Richtung der von aussen auf diesen Flächen stehenden Normalen als positiv annimmt:

$$- p_{xx}\, d_y\, d_\chi \text{ und } \left(p_{xx} + \frac{d p_{xx}}{d_x}\right) d_y\, d_\chi;$$

die Resultante dieser Spannungen ist also bestimmt durch den Ausdruck:

$$\frac{d p_{xx}}{d_x}\, d_x,\, d_y,\, d_\chi.$$

Die beiden anderen Flächensysteme des gedachten Parallelepipeds ergeben in derselben Hinsicht ähnliche Ausdrücke und somit wird man schliesslich für die Komponente der Kraft $Tdv$, welche auf das

gedachte Parallelepiped in der Richtung der Koordinatenachse $ox$ einwirkt, den Ausdruck erhalten:

$$F_x\, dv = \left(\frac{d p_{xx}}{d_x} + \frac{d p_{yx}}{d_y} + \frac{d p_{zx}}{d_z}\right) dv.$$

Ganz ähnliche Ausdrücke wird man auch in gleicher Beziehung für die beiden anderen, in den Richtungen der Koordinatenachsen $oy$ und $oz$ angenommenen Komponenten $F_y$ und $F_z$ der Kraft $F\,dv$ erhalten.

Andernteils hat man nach Maxwell (vol. I, p. 166) für die Komponenten $xyz$ der Intensität $f$ des Kraftfeldes

$$\frac{8\pi p_{xx}}{K} = X^2 - Y^2 - Z^2,$$

$$\frac{8\pi p_{xy}}{K} = 2xy,$$

$$\frac{8\pi p_{zx}}{K} = 2zx.$$

Zur Vereinfachung ist zu setzen:

$$4\pi\varrho = \frac{dKX}{dx} + \frac{dKY}{dy} + \frac{dKZ}{dz},$$

und

$$4\pi\mu_x = \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dx},$$

$$4\pi\mu_y = \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz},$$

$$4\pi\mu_z = \frac{dX}{dy} - \frac{dX}{dx};$$

hierbei hat $\varrho$ die Bedeutung der elektrischen Masse oder der elektrischen Kraftgrösse und der Vektor $\mu$, dessen Komponenten durch $\mu_x$, $\mu_y$ und $\mu_z$ gegeben sind, hat als Ausdruck der elektrischen vektoriellen Masse zu gelten.

Wenn man die Spannungskomponenten $p_x$, $p_y$ und $p_z$ durch ihre Werte ersetzt, so erhält man als Ausdruck für die Komponente der Kraft $F\,dv$ in der Richtung der Koordinatenachse $ox$:

$$F_x = \frac{K}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right)$$
$$+ y\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) - z\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right)$$
$$= \frac{K}{4\pi}x\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) + K(Y\mu_z - Z\mu_y).$$

Wenn man den Ausdruck von $\varrho$ entwickelt, ferner die Summe

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$$

durch ihren Wert ersetzt und endlich noch die Summe der Quadrate der Komponenten vervollständigt, so erhält man schliesslich:

$$F_x = \varrho X - \frac{F^2 K}{8\pi}\frac{dK}{dx} + K(Y\mu_z - Z\mu_y).$$

Dieser Ausdruck, sowie die noch hinzuzudenkenden beiden analogen Ausdrücke für die Kraftkomponenten $F_y$ und $F_z$ zeigen, dass die Kraft $F$ als die Resultante von drei anderen Kräften zur Wirkung kommt; diese drei Kräfte sind:

1. Eine Kraft $F_\varrho = f\varrho$, welche in der Richtung der Intensität des Kraftfeldes wirksam ist und, wie man sieht, mit der aus dem Coulombschen Kraftgesetze oder im allgemeinen mit der aus dem Newtonschen Gravitationsgesetze sich ergebenden Resultante der Fernewirkung identisch ist.
2. Eine Kraft $F_k = -K\frac{f^2}{8\pi}\frac{dK}{dn}$, welche sich nur in nicht homogenen Medien entwickelt und in der Richtung $n$ wirksam ist, wo die induzierende Kraftwirkung am schnellsten abnimmt. Diese Kraft ist, im Gegensatz zu der in der gewöhnlichen Theorie der induzierten Elektrisation oder der sogenannten Influenzierung geltenden Annahme, von der Richtung des Kraftfeldes $f$ unabhängig. Nichtsdestoweniger stehen die beiden Theorien mit einander und mit der Erfahrung in Übereinstimmung, sobald man nach den beiden Methoden die Gesamtwirkung berechnet, welche durch irgend ein in das Feld eingeführtes Dielektrikum herbeigeführt wird. Diese Gesamtwirkung entspricht zum Beispiel der Anziehung, die eine dielektrische kugelförmige Masse durch einen elektrisierten Körper erleidet.
3. Eine Kraft, welche senkrecht auf der Richtung des Feldes und auf der Richtung des Vektors $\mu$ steht; ihr Wert ist gegeben durch die Formel:

   $$F\mu = Kf\mu \sin\Theta;$$

   diese Kraft ist daher proportional der Fläche des über $f$ und $\mu$ konstruierten Parallelogramms, welche der Zusammensetzung dieser Kräfte entspricht.

In dem Falle, wo es sich um ein festes Kraftfeld handelt, wird von diesem Kraftfelde ein Potential aufgenommen, man hat daher $\mu = 0$ und in Folge dessen ist die gedachte Kraft $F\mu$ nicht vorhanden.

In dem variablen Felde hat man bisher keine genaue Messung der Kräfte angestellt, wodurch das Vorhandensein dieser Kraft $F\mu$ und der dafür geltende Ausdruck hätte bestimmt werden können.

59. Die Theorie des Magnetismus, deren Grössenbestimmung in Analogie mit der Grössenbestimmung in der Elektrostatik steht, führt unzweifelhaft zu Ausdrücken, welche mit den vorhergehenden zur Bestimmung der auf die Volumeneinheit eines in irgend einen Punkt des magnetischen Kraftfeldes gebrachten Körper identisch sind.

Diese Kraft ist daher die Resultante $ds$ von den drei folgenden Kräften:

1. $F_\varrho = f_\varrho$ in Übereinstimmung mit dem Coulombschen Gesetze.
2. $F_k = -K \frac{f^2}{8\pi} \frac{dK}{dn}$. Diese Kraft ist aber in dem Falle, wo ein nicht homogenes Mittel in Wirksamkeit tritt und daher $K$ variabel ist, nicht vorhanden. Dies ist zum Beispiel der Fall bei der Wirkung eines magnetischen Kraftfeldes auf einen paramagnetischen oder auf einen diamagnetischen Körper.
3. Eine Kraft $F\mu = Kf\mu \sin \Theta$. Diese Kraft ist, wie im Fall eines elektromagnetischen Feldes, nur in den Teilen des Kraftfeldes vorhanden, wo kein Potential herrschend ist; ihr Vorhandensein ist aber leicht nachweisbar, denn sie entspricht der Kraft, welche in dem Gesetze von Biot und Savart zur Geltung kommt.

Dieses experimentell von Biot und Savart festgestellte Gesetz besagt bekanntlich, dass die Wirkung eines elektrischen Stromes auf einen Magnet umgekehrt proportional ist dem Verhältnis der Entfernung zwischen beiden, und es entspricht daher dieses Gesetz der Greenschen Potentialformel

$$V = \frac{m^2}{r}.$$

Vorausgesetzt ist dabei, dass ein relativ unendlich langer Strom auf eine sehr kleine Magnetnadel einwirkt.

Vaschy hat thatsächlich nachgewiesen, dass in dem Falle, wo ein Magnetfeld durch einen elektrischen Strom geschaffen wird, die Dichte $\mu$ der vektoriellen Masse durch geeignete Wahl der Einheiten nach Grösse und Richtung sich mit der Stärke des vom Kraftfelde hervorgebrachten Stromes vermischt. Der Ausdruck für die Kraft $F\mu$ wird daher, abgesehen vom Faktor $K$, dargestellt durch $fi \sin \Theta$, wodurch die Wirkung des vom Strom erzeugten und zur Fläche des durch $f$ und $i$ bestimmten Parallelogramms gegeben ist. Hieraus folgt,

dass das von Vaschy aufgestellte Gesetz mit dem von Biot und Savart experimentell begründeten Gesetze übereinstimmt.

Das Vorhandensein der auf diese Weise festgestellten Kraft $F\mu$ scheint daher die oben besprochene Theorie Maxwells für den Fall eines elektrischen im Gleichgewicht befindlichen Kraftfeldes zu rechtfertigen und zwar in dem Umfange, in welchem Vaschy diese Theorie auf Grund der Einführung des Begriffes der vektoriellen Masse für den allgemeinen Fall irgend eines magnetischen oder elektrischen, wenn auch selbst variablen Kraftfeldes in Anwendung bringt*).

---

Viertes Kapitel.

## Die allgemeinen Gesetze der Kraftwirkung.

60. Der Begriff der mechanischen Arbeit scheint zuerst von Poncelet in die Mechanik eingeführt worden zu sein. Bei Lagrange ist das Wort „Arbeit" noch nicht zu finden und der Begriff auch noch nicht zu klarer Anwendung gekommen. E. Dühring bemerkt darüber in seiner „Kritischen Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik" folgendes:

„Parallel mit der Entwickelung und dem Hervortreten der technischen Gesichtspunkte machte sich der Begriff der mechanischen Arbeit, der auf dem Boden der praktischen Mechanik erwuchs, allmählich auch in der rationellen Mechanik geltend. Bei Lagrange kam dieser Ausdruck und die entsprechende Vorstellung noch gar nicht in Frage. Für unser Jahrhundert sieht man aber aus Poncelets Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale**) recht deutlich, wie sich der Sprach- und Begriffsgebrauch erst allmählich im Sinne der technischen Gesichtspunkte abänderte. Der geniale Begründer der modernen synthetischen Geometrie, der sonst die Neuheit der Wendungen nicht scheute, glaubte in jener mechanischen Schrift noch besonders bemerken zu müssen, dass er sich des Ausdrucks „mechanische Arbeit" und des entsprechenden Begriffs als einer leitenden Vorstellungsform bedienen wolle. Hierbei erkennt man deutlich, wie das besondere Hervorheben des Arbeitsbegriffs in den rein theoretischen und rationellen Grundlagen der Mechanik als eine noch erst zu vollendende Thatsache, aber noch keineswegs als bereits eingeleitete Gewohnheit angesehen

*) 2. Aufl. S. 456.

**) 1. Ausgabe 1829; 2. Ausg. 1838—40; 3. Ausg. von Kratz. Paris 1870.

wurde. Wenn eine solche Voraussetzung schon von einem technischen Mechaniker gemacht und der durchgängige theoretische Gebrauch des Arbeitsbegriffs für alle rationellen Grundlagen der Mechanik als eine Art Neuerung angesehen wurde, so kann man die Kluft ermessen, die im Übrigen zwischen der reinen und der analytischen Theorie einerseits und der Geläufigkeit des Arbeitsbegriffs anderseits bestehen musste. Die Rückwirkung des so in der praktischen Mechanik ausgebildeten Arbeitsbegriffs konnte aber nicht lange ausbleiben und in die neuesten Darstellungen der Mechanik oder Physik ist der Gebrauch des Arbeitsbegriffs sogar schon als eine selbstverständliche Lehrbuchangelegenheit eingedrungen."

„Hiermit soll nicht gesagt sein, dass den früheren Darstellungen der Kern der Sache an sich selbst habe fehlen können; denn in der Gleichung der lebendigen Kräfte, wie sie von Lagrange konzipiert wurde, repräsentiert die eine Seite die räumlichen Positionen des Systems, und wenn man zwei verschiedene Positionen als Grenzen setzt, so entspricht der dazwischen liegende Zuwachs einer Differenz zwischen den Werten der auf die Positionen bezüglichen Funktion. Diese Funktion ist es aber, die dem ganz universell gedachten Arbeitsbegriff thatsächlich entspricht, obwohl diese Auslegung und Vorstellungsart ursprünglich nicht vorhanden war und auch heute noch für veränderliche Kräfte nicht hinreichend generalisiert ist." —

Zur Feststellung des Begriffs „Arbeit" ist folgendes zu bemerken:

Geht man der Sache auf den Grund, so ist jede latente, relativ statische Kraft eine Arbeitsgrösse und jede arbeitende Kraft wirkt mit einer gewissen Arbeitsstärke. Statt Arbeitsgrösse würde demnach auch das Wort Kraftgrösse und statt Arbeitsstärke würde das Wort Kraftstärke die hervorgehobenen Begriffe vollständig decken.

Der Begriff der Arbeit ist in physikalischer Beziehung überhaupt bestimmter und weiter zu fassen als dies gewöhnlich geschieht. Jede Masse repräsentiert eine Arbeitsgrösse, insofern sie durch einen Arbeitsprozess entstanden ist und nur durch Arbeitsprozesse in ihrer Form und physikalischen oder chemischen Beschaffenheit verändert werden kann. Der Druck einer ponderablen Masse entspricht einer Arbeitsgrösse insofern diese Masse sich in einer gewissen Entfernung vom Gravitationszentrum befindet und bei Gelegenheit zur Annäherung an dieses Gravitationszentrum eine entsprechende Arbeitsgrösse abzugeben vermag. In ähnlicher Beziehung entspricht aber auch jede Geschwindigkeit, insofern dadurch die in einer beliebigen Zeiteinheit zurückgelegte Kraftstrecke gekennzeichnet ist, einer Arbeitsgrösse, wogegen eine positive oder negative Beschleunigung eine Arbeitsstärke repräsentiert,

insofern man dabei auf eine beliebige Masseneinheit Bezug nimmt. Alle Kräfte in der Natur sind in bestimmten Arbeitsgrössen vorhanden und diese Kräfte wirken durch ihre relativen Arbeitsstärken. Mit Rücksicht hierauf mag als allgemeines Arbeitssymbol der Buchstabe $v$ gelten, wobei diese Arbeitsgrösse beziehungsweise Arbeitsstärke in irgend welcher Potenzierung auftreten kann.

61. Das Naturwirken beruht im allgemeinen auf einem Dualismus, auf einem Gegensatz von Positiv und Negativ, von Aufnahmefähigkeit, Durchdringlichkeit (Permeabilität) oder Kapazität und Erregungsfähigkeit, Reaktionsvermögen oder Selbstinduktion. Jede Einzelkraft beruht auf einem solchen Dualismus, denn ohne Anerkennung des Prinzips der Wirkung und Gegenwirkung ist keine Kraft denkbar. Die Kraft kann nur gegenüber einem Widerstande gedacht werden. Das Wesen der Kraft offenbart sich am deutlichsten in den Elektrizitätserscheinungen, wo die Kraftfaktoren als positive und negative Wirkungsform sich darstellen. An und für sich ist jeder der beiden Kraftfaktoren aber wiederum eine Kraft und daher auch in sich dualer Natur und somit haben wir Kräfte höherer und niedrerer Ordnung zu unterscheiden, wie man in der neueren Chemie die Atome als Moleküle höherer Ordnung betrachtet. Das Differential der Volumenkraft ist die Flächenkraft, welche als die Parallelschaltung äquipotentieller elementarer Volumenkräfte in einer Niveaufläche anzusehen ist. Die Entladung oder Differentiation der Niveaufläche erfolgt in der Hintereinanderschaltung elementarer Volumenkräfte umgekehrt proportional zu den im Quadrat der Entfernung von der Entladungsstelle sich ausbreitenden Kraftflächen. Die nach der einen Seite hin sich entladende Halbkugelfläche entspricht der lebendigen Kraft $\frac{v^2}{2}$. Die Differentiation der lebendigen Kraft nach der Kraftstrecke $v$ ergiebt den Ausdruck:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v \cdot dv,$$

wodurch die Dualität des Kraftdifferentials charakterisiert wird. Keiner der beiden Kraftfaktoren: Druck und Geschwindigkeit kann sich absolut nullieren, weil sonst der andere Faktor unendlich gross werden müsste, wenn die Kraft nicht verschwinden soll, wodurch das Prinzip der Erhaltung der Kraft negiert würde. Es muss daher unter allen Umständen eine schwingende Bewegung zwischen Masse und Massenmittelpunkt vorhanden sein. Hiermit kommt die kinetische Molekulartheorie zur Anerkennung. Im Massenmittelpunkte oder Trägheitsmittelpunkte kommt die Resultante aller Kraftpunkte der Masse zur Geltung; die Bildung dieser Resultante erfordert aber Zeit, weil die Fortpflanzung

einer Störung in einem Medium stets nur in einem Zeitverlaufe sich vollziehen kann, wenn dieser Zeitverlauf auch unmessbar klein ist.

Wirkt also eine Reihenfolge von Kraftimpulsen auf eine Masse derartig ein, dass nicht alle Kraftpunkte ganz gleichmässig beeinflusst werden, was nur in einer Äquipotentialfläche bezüglich einer einfachen molekularen Schicht von Kraftpunkten stattfinden könnte, so wird bei Einwirkung des letzten von aussen kommenden Kraftimpulses der Massenmittelpunkt noch nicht alle Einwirkungen akkumuliert haben und es wird daher zwischen der Gesamtmasse und dem Massen- oder Trägheitsmittelpunkte eine Potentialdifferenz stattfinden, das heisst: die Masse wird in sich selbst arbeiten. Diese innere Arbeit, welche in einem freien System von Kraftpunkten, wie dies durch ein Gasvolumen repräsentiert wird, durch den kinetischen Druck als Spannung sich äussert, ist auch bei sogenannten festen Körpern vorhanden, denn auch diese werden bei Aufnahme von äusserer Kraftwirkung, die ihnen in der Form von Wärme zugeht, so zu sagen lebendig, das heisst: ihre lebendige Kraft äussert sich durch Ausdehnung, wobei jeder Kraftpunkt der Masse an sich durch lebendige Kraft wirksam wird.

62. Im allgemeinen ist jede Kraftgrösse als eine dreidimensionale Raumgrösse, das ist als eine Volumengrösse anzusehen, denn jede Kraftgrösse ist als eine Art Akkumulator eines in kleinsten Bewegungen aufgehenden kinetischen Druckes zu betrachten, wobei die Umsetzung der Kraftwirkung ähnlich wie bei einem Potenzierungsmechanismus vor sich geht. Auf Grund dieser Anschauung bemühte sich auch Lagrange die Gesetze der Kräftezusammensetzung aus der Wirkungsweise des Flaschenzuges zu entwickeln, welche Bemühung aber natürlich nicht den erwarteten und allgemein genügenden Erfolg haben konnte. Legt man den Kraftwirkungen die motorische Kraft, das ist die Volumenkraft, zu Grunde, so würde das allgemeinste Kraftsymbol $V^3 = L^3$ sein. Will man aber bloss gleichwertige Kraftelemente, das heisst nur die Kraftelemente einer Niveaufläche oder Äquipotentialfläche in Betracht ziehen und also Kraftwirkungen unter einer und derselben Mitwirkung des Kraftfeldes gelten lassen, wie dies zum Beispiel bei Massenbestimmungen mittels der gleicharmigen Hebelwage am direktesten und prinzipiell am genauesten geschieht, so hat man die Volumenkraft gewissermassen auf die zulässige Dicke oder Höhe der Niveaufläche, das ist auf die spezifische Kraftstreckeneinheit des Kräftesystems zu reduzieren; diese spezifische Kraftstreckeneinheit wird durch $L^0 = 1$, oder, wenn man die absolute Einheit als Volumenkraft betrachtet, durch $L^{-1}$ (als statischer Widerstand) symbolisiert, so dass man für die Flächenkraft oder das Potential das Symbol $L^3 L^{-1} = L^2$ oder im

allgemeinen $v^2$ erhält, wobei man mit $v^2$ den auf die Einheit der Äquipotentialfläche wirksamen kinetischen Druck bezeichnet, der wiederum durch eine Geschwindigkeit hervorgerufen und gemessen wird.

Will man endlich die motorische oder Volumenkraft auf die Einheit der Niveau- oder Äquipotentialfläche reduzieren, so ist einfach $L^3 . L^{-2} = L$, oder im allgemeinen $v$ zu setzen, wobei $v$ der doppelten in Bewegung aufgehenden Kraftstrecke entspricht, die Kraftstrecke selbst aber als eine Geschwindigkeit, das ist als der in der gewöhnlichen Zeiteinheit oder Kraftstreckeneinheit zurückgelegte Weg zu gelten hat. Diese Kraftstreckeneinheit sei mit $c$ bezeichnet, so dass die Gleichung gilt $\frac{v}{2} = c$. Es ist daher $v = 2c$, das heisst, bei der Wirkung einer konstanten Kraft, als welche innerhalb gewisser Grenzen die Schwerkraft zu gelten hat, ist am Ende des zweiten Zeitintervalls (der zweiten Sekunde) die zurückgelegte Kraftstrecke gleich der tendierenden Geschwindigkeit.

Die Flächenkraft $v^2$ gewinnt noch dadurch eine besondere physikalische Bedeutung, dass bei der Beobachtung der Naturvorgänge immer nur relativ Flächenkräfte, das heisst Strahlungswirkungen, die als von einer gleichartig wirkenden Fläche ausgehend zu gelten haben, in Betracht zu ziehen sind.

63. Mit Berücksichtigung des Prinzips der Erhaltung der Kraft ist vorauszusetzen, dass ein isoliert gedachtes Kraftsystem, welches also sich in einer sogenannten adiabatischen Zustandsänderung befindet, in allen Stadien seines Wirkungsprozesses dieselbe Kraftsumme enthalten muss. Jede Kraft bedarf zu ihrer Bethätigung einer anderen Kraft und somit muss jede Kraft schon an und für sich selbst dualer Natur sein, das heisst, sie muss aus zwei Faktoren bestehen, die im pulsiven Wirken der Kraft abwechselnd und relativ zu einander als statisch und dynamisch, das ist als Druck und Geschwindigkeit zur Wirkung kommen, wobei aber der Druck immer wieder nur als die auf ein Zeit- oder auf ein Kraftstreckendifferential (je nach der Anschauungsform) reduzierte Geschwindigkeit zu gelten hat. Denn insofern der Druck als die Tendenz zur Geschwindigkeitsentwickelung zu denken ist, kann mit dem logischen Begriff des Druckes nicht ein absolut unveränderlicher Zustand verbunden werden. Dieser logischen Forderung wird in dem üblichen Formelwesen dadurch entsprochen, dass man die Beschleunigung, das heisst: den Urimpuls der Kraftwirkung durch $LT^{-1}$ definiert. Dieser Urimpuls ist durch die auf die Einheit einer Niveaufläche oder Äquipotentialfläche reduzierte Streckeneinheit der wirksamen motorischen Kraft zu bestimmen und daher, indem man

diese Kraftdifferentiation auf die spezifische Einheit des Vorganges bezieht, einfach durch $L$ zu symbolisieren, wobei man sich die Volumenkraft $L^3$ des Impulses durch $L^2$ (als Symbol der Fläche) dividiert denkt. Selbstverständlich ist bei dieser Operation auch diese Fläche als eine Volumenkraft anzusehen, deren dritte, als Strahl nach dem Zentralpunkte gehende Dimension als absolute Einheit $L^0 = 1$ gesetzt ist, denn es können immer nur Grössen gleicher Ordnung zu einander in Vergleich gestellt werden.

Für die gleichzeitig beginnenden und gleichzeitig endenden Kraftimpulse einer und derselben Äquipotentialfläche sind bezüglich der Vergleichung ihrer Intensitäten oder Kraftstärken die Kraftstrecken oder sogenannten Widerstände in Betracht zu ziehen, durch deren Kapazität die lebendigen Kräfte auf die Differentiale $v\,dv$ reduziert werden, wobei die verschwindend kleine Grösse $dv$ als spezifische Einheit betrachtet wird. Diese Wirkung wird also durch die Kraftstrecke $L$ definiert, weil der Zeitverlauf unter den angenommenen Umständen keine Bedeutung hat, denn es werden die Intensitäten durch gleichzeitig wirkende Kraftgrössen gemessen.

Jede Kraft ist zwar an und für sich als Volumenkraft dreidimensionaler Natur und deshalb werden auch gewöhnlich bei analytischen Entwickelungen drei rechtwinklig aufeinanderstehende Koordinaten mit Bezug auf die drei im räumlichen Kraftfelde möglichen drei Richtungen der freien Kraftentwickelung in Betracht gezogen. Wenn man aber berücksichtigt, dass bei der Wahrnehmung und Beobachtung von Naturvorgängen immer nur die in einer und derselben Niveau- oder Äquipotentialfläche sich äussernden Kraftwirkungen zur Geltung kommen, so erscheint es gerechtfertigt, wenn man die eine Dimension, welche der Dicke oder Tiefe dieser Potentialfläche entspricht, auf die spezifische Streckeneinheit reduziert annimmt und daher die Kraft nur nach zwei Dimensionen, als Flächenkraft, in Betracht zieht. In der That werden die Naturvorgänge als Flächenwirkungen betrachtet, indem man das Potential mit $v^2$ und dessen lebendige Kraft durch $\frac{v^2}{2}$ symbolisiert. Die Kraftstrecke oder Kraftlinie ist dann $v$ und wird durch das Differential der lebendigen Kraft

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v \, . \, dv$$

dargestellt, wobei die unendlich kleine Strecke $dv$ wiederum als spezifische Krafteinheit anzusehen ist. Durch diesen, für gewöhnlich gleich der Einheit gedachten Faktor $dv$ wird das pulsive Wirken, das ist der dynamische Charakter der Kraft gekennzeichnet. Man kann

dieses $dv$ auch unter der Anschauungsform der Zeit betrachten und durch $dt$ zum Ausdruck bringen, um dadurch zu kennzeichnen, dass jede Kraftentwickelung, indem sie pulsivisch in einer unendlich kleinen Kraftstrecke zum Ausdruck kommt, dazu auch einer gewissen, wenn auch vielleicht unendlich kleinen Zeit bedarf. Mit Rücksicht auf diese Auffassungsweise hat Lagrange in seiner statischen virtuellen Grundgleichung an Stelle der absoluten Kräfte deren virtuelle Reduktionen, das heisst deren virtuelle Momente in der Form $Pdp$, $Qdq$ u. s. w. eingeführt.

Das Produkt $v . dv$ entspricht der Zerlegung der Kraft in eine maximale Geschwindigkeit und in einen minimalen Druck, oder auch der Zerlegung in einen maximalen Druck und eine minimale Geschwindigkeit, indem auch die Druckwirkung nur durch die in der Zeiteinheit zur Entwickelung kommende Geschwindigkeit der Schwerkraftswirkung, das ist für die Masseneinheit dnrch $g$ gemessen wird. Indem also die Geschwindigkeitsentwickelung des Schwerkraftfeldes als Druck schon bei der Gewichtsbestimmung der ruhenden Masse in Betracht gezogen wird, gewinnt man für die am Ende der ersten Fallsekunde sich bethätigende freie Kraftwirkung das Symbol $g^2$, wobei aber die Kraft durch ihr pulsivisches Wirken als Druck bereits ein Zeitintervall vor Einleitung der Bewegung sich bethätigt hat, so dass also die Geschwindigkeitsentwickelung $g$ am Ende des ersten Zeitintervalls erfolgt. Durch Reduktion der Kraftgrösse $g^2$ auf die Zeiteinheit erhält man daher $\frac{g^2}{2}$ in der Bedeutung der lebendigen Kraft. Anstatt der willkürlich gewählten Zeiteinheit der Sekunde ist hierbei eigentlich die spezifische Zeiteinheit, das heisst das Zeitintervall eines Kraftimpulses zu denken; da aber diese Zeiteinheit unbekannt ist, so hat man mit Rücksicht auf die Bequemlichkeit der Messung dafür die Sekunde gesetzt.

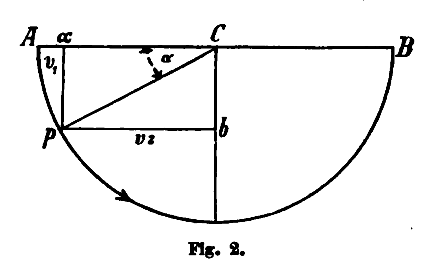


Fig. 2.

64. Es sei nun angenommen, ein Kraftpunkt $P$ schwinge unter dem Einfluss der Schwerkraft im Halbkreise um den Zentralpunkt $C$ (Fig. 2). Um ein freies Spiel der Kräfte zu erhalten, sei die Verbindung des Kraftpunktes $P$ mit dem Schwingungszentrum durch einen elastischen Faden hergestellt. Sobald der Kraftpunkt $P$ sich aus der durch das Schwingungszentrum gelegten Horizontalen $AB$, welche die Neutralebene

des Kräftesystems repräsentiert, und in welche der Kraftpunkt $P$ durch eine äussere dem System fremde Kraft zuerst gehoben worden ist, in Folge der Schwerkraftswirkung entfernt hat, wird eine Komponente des Schwerkraftsfeldes in dem Verbindungsfaden wirksam, welche den Faden spannt. Der Faden wird dann zur Kraftstrecke und die in ihm wirksame Komponente der Schwerkraft wirkt als Zentralkraft. Ist $a$ der wachsende Schwingungswinkel und $j$ die Beschleunigung der Schwere, so wird diese Zentralkraft durch $j \sin a = v_1$ dargestellt. Die freie Komponente $v_2$ der Trägheitskraft des Punktes $P$ ist horizontal gerichtet, indem der Punkt mit der Geschwindigkeit $j \sin a$ in der Richtung der Äquipotentialflächen des Kraftfeldes sich der einwirkenden Beschleunigung des Schwerkraftfeldes zu entziehen sucht. Die den Punkt zur Bewegung antreibende Komponente der Schwerkraft ist $j \cos a = v_2$.

Auf den Punkt wirken also zwei Kräfte $v_1$ und $v_2$, welche im freien System rechtwinklig gegen einander gerichtet sind und von denen die eine in die Wirkungsrichtung des Kraftfeldes, die andere in die Neutralrichtung des Kraftfeldes fällt. Die erste Wirkungskomponente des Kraftfeldes, welche als Zentralkraft den Punkt in den Äquipotentialflächen des Feldes zu erhalten sucht, ist dargestellt durch $j \sin a = v_1$, die andere, welche den störenden Kraftpunkt in der Strömungsrichtung des Kraftfeldes antreibt, ist $j \cos a = v_2$, wobei $a$ immer als wachsender Schwingungswinkel in Betracht zu ziehen ist, so dass die Kräfte $v_1$ und $v_2$ beim Übertritt des Kraftpunktes in den anderen Quadranten des Kraftfeldes ihre Rollen wechseln. Demnach ist der Cosinus immer als die wachsende Winkelfunktion, der Sinus immer als die abnehmende Winkelfunktion zu betrachten.

In Folge dieser Krafteinwirkungen unterliegt der Kraftpunkt $P$ den Tangentialbeschleunigungen

$$v_1 \sin a = j \sin^2 a \text{ und } v_2 \cos a = j \cos^2 a.$$

Die im Kraftpunkte für den wachsenden Schwingungswinkel $a$ momentan aufgespeicherte Gesamtkraft ist bestimmt durch die Formel:

$$p = \frac{v_1^2}{2} \sin^2 a + \frac{v_2^2}{2} \cos^2 a,$$

insofern die in Fig. 2 dargestellten Bewegungsgrössen $v_1$ und $v_2$ nach der Formel

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dv} = v$$

als Differentiale lebendiger Kräfte zu gelten haben.

Für $a = 45^\circ$ und daher $v_1 = v_2 = v$ ergiebt die obige Kraftformel somit

$$p = \frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{4} = \frac{v^2}{2},$$

oder

$$v^2 + v^2 = 2\,v\,.\,v^{*}),$$

so dass also bei Eintritt der Schwingungswinkelgrösse $a = 45^\circ$ die momentane Maximalarbeit der beiden Kräfte, das ist die lebendige Kraft $\frac{v^2}{2}$ durch die Summe der kleinsten lebendigen Kräfte $\frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{4}$ als kinetischer Druck repräsentiert wird, indem die beiden Kraftfelder des Systems: das Schwerkraftfeld und das Trägheitskraftfeld in der Strömungsrichtung und in der dazu normalen Richtung der Äquipotentialflächen einander in gleicher Stärke entgegenarbeiten.

Wenn der Kraftpunkt durch seine tiefste Lage schwingt, und dabei momentan die Maximalgeschwindigkeit $v_1$ erreicht, so ist in der Formel

$$p = \frac{v_1}{2} \sin^2 a + \frac{v_2^2}{2} \cos^2 a$$

der Ausdruck $\frac{v_2^2}{2} \cos^2 a = 0$ zu setzen, wobei der Ausdruck $\frac{v_1^2}{2} \sin^2 a$ für $\sin^2 a = 1$ in $\frac{v_1^2}{2}$ übergeht. Hierbei muss aber die Schwingung schon um ein Differential $d\,a$ die Grenze überschreiten, weil der Ausdruck $\sin^2 a$ bei unendlicher Annäherung von $\sin a$ an die Grenze Eins von dieser Grenze um ein Differential $d\,a$ zurückgeschoben ist, so dass also der Trägheitsmittelpunkt der Gesamtmasse in horizontal tangentialer Richtung mit einer Geschwindigkeit $2\,d\,a$ oder die Gesamtmasse mit einem Drucke $d\,a$ den Trägheitsmittelpunkt vorwärts treibt. Die lebendige Kraft $\frac{v^2}{2}$ unterliegt also bei diesem Richtungswechsel einer Differentiation, indem ihr Faktor: Geschwindigkeit in das Maximum und ihr Faktor: Druck in das Minimum eintritt, nach der Formel

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\,d\,v.$$

Die Gesamtkraft bleibt dabei unverändert erhalten, indem das einerseits verloren gehende Differential gleichzeitig auf der anderen Seite wiedergewonnen wird, nach der Formel

$$\left[\frac{v^2}{2} - d\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2}.$$

Aber auch die Bewegungsgrösse $v$ bleibt für ein spezifisches Zeitdifferential $d\,a$ mit Bezug auf die spezifische Zeiteinheit $\frac{\pi}{2}$, das ist für

*) Ist $a < 90$, so gilt für die ungleichen Kräfte $v_1$ und $v_2$ die Gleichung

$$v_1^2 + v_2^2 = 2\,v_1\,.\,v_2 \cos a.$$

das Maximum $\alpha = 90^\circ$ des Schwingungswinkels in ihrer Grösse unverändert, weil die auf der einen Seite als Beschleunigung verlorene Geschwindigkeit $dv$ auf der anderen Seite wiedergewonnen wird, nach der Formel

$$(v - da) + da = v.$$

Somit ist die Geschwindigkeit momentan als gleichförmig zu erachten, weil die der Messung sich entziehende kleine Grösse $da$ für die Beobachtung als positiver oder negativer Fehler auftreten kann.

Ist der Kraftpunkt in Folge der Reaktion seiner Trägheitskraft gegenüber der Schwerkraft im Aufsteigen begriffen, so folgt aus den aufgeführten Beziehungen der Kraftwirkungen des Systems, dass der Aufsteigwinkel $\alpha$ den Grenzwert $\alpha = 90^\circ$ nicht vollständig erreichen kann.

Es kann nämlich mit Bezug auf das dynamische Prinzip keine vollständige Nullierung der einen oder andern der beiden im freien Spiel befindlichen Kräfte eintreten, insofern deren Differentiale $v \, . \, dv$ als Kräfte höherer Ordnung sich nicht vollständig nullieren können. Das heisst mit anderen Worten: Kräfte behaupten unter allen Umständen ihren dynamischen Charakter, indem sie entweder positiv durch Selbstinduktion oder Beschleunigung, oder negativ durch Kapazität oder Verzögerung wirksam sind. Die im Spiel zweier solcher entgegengesetzt wirksamen Kräfte einerseits in der Form von Geschwindigkeit verlorene Kraft wird auf der anderen Seite als Geschwindigkeit wieder gewonnen, gleichviel ob der Vorgang in der Vermehrung oder Verminderung von Massengeschwindigkeit oder bloss in relativ statischer Druckerzeugung besteht, wobei die Druckwirkung doch immerhin kinetischer Natur sein, das heisst in Schwingungen vor sich gehen muss, weil ein konstanter Druck nur als eine unendliche Geschwindigkeitsvermehrung denkbar ist, denn sobald die Tendenz zur Geschwindigkeitsvermehrung sich nullieren würde, müsste auch der Druck sich nullieren. Daher kann der Druck nur als ein kinetisches Wechselspiel von Schwingungen in periodischer Abwechselung von Druck und Gegendruck gedacht werden.

Der Differentialquotient der lebendigen Kraft $\frac{v^2}{2}$, das ist

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dv} = v$$

besteht daher, gleichviel ob die lebendige Kraft in der Form einer Geschwindigkeit oder eines Druckes auftritt, aus zwei Faktoren, deren Summe im Verlauf des Kräftespiels konstant bleibt. Hat die lebendige

Kraft die Form einer Geschwindigkeit, so ist die Summierung ihrer beiden Faktoren formuliert durch:

$$(v - dv) + dv = v,$$

indem in Folge der Abgabe der bei gleichförmiger Bewegung verschwindend kleinen Druckgrösse $dv$ auch nur eine verschwindend kleine Geschwindigkeitsgrösse abgegeben wird. Hat dagegen die lebendige Kraft die Form der Druckwirkung, so gilt die Formel:

$$(v + dv) + (- dv) = v,$$

weil die Druckkraft sich um die verschwindend kleine Grösse $dv$ verstärken oder beschleunigen muss, um durch die erzeugte Geschwindigkeit den ihr als Kapazität gegenüber auftretenden negativen Druck wiederum auszugleichen und somit sich in ihrer Grösse zu erhalten. Würde diese Wirkungsweise für eine messbare Zeit fortbestehen, so müsste durch Summierung der Beschleunigungsimpulse $dv$ eine messbare Vergrösserung der Kraftgrösse $v$ stattfinden.

Wenn also der Kraftpunkt $P$ durch seine lebendige Trägheitskraft $\frac{v^2}{2}$ gegen das reagierende Schwerkraftfeld emporgetrieben wird, so kann der von der Vertikalrichtung gemessene, stets mit wachsendem Cosinus und abnehmendem Sinus zu betrachtende Schwingungswinkel den Grenzwert $\alpha = 90^\circ$ gemäss der Formel

$$p = \frac{v_1^2}{2} \sin^2 \alpha + \frac{v_2^2}{2} \cos^2 \alpha$$

nicht vollständig erreichen. Selbstverständlich ist, mit Bezug auf Fig. 2, die im vorhergehenden Quadranten wirksame Vertikalkraft $v_1$ des Schwerkraftfeldes nunmehr zur Horizontalkraft und die vorher wirksame Horizontalkraft $v_2$ der Trägheit zur Vertikalkraft geworden, weil die vorher wirksame Komponente des Schwerkraftfeldes ihre Differentiale im schwingenden Kraftpunkte integriert hat und die Trägheitskraft $v_2$ dieses Punktes nunmehr direkt gegen die Strömungsrichtung des Schwerkraftfeldes wirksam wird. Wenn sich also der Schwingungswinkel bis auf einen gewissen kleinen Wert dem Grenzwerte $\alpha = 90^\circ$ genähert hat, so hat die Wirkung des Schwerkraftfeldes bereits die aufsteigende Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes in ein negatives Geschwindigkeitsdifferential $(-dv)$ umgewandelt, während die Gesamtmasse noch mit dem positiven Geschwindigkeitsdifferential $(+dv)$ begabt ist. Diese minimalen Geschwindigkeiten, von denen die aufsteigende als zuletzt auf eine Druckwirkung $\frac{dv}{2}$ reduziert zu denken ist, ergeben als rückwärtstreibenden spezifischen Urimpuls

des Schwerkraftfeldes die minimale lebendige Kraftgrösse $\frac{(d\,v)^2}{2}$, während $v$ bezw. $v_1$ der Anzahl der anzutreibenden Kraftpunkte oder ponderablen Moleküle der schwingenden Masse entspricht; so dass also in diesem Falle $v$ als eine absolut statische Grösse und $\frac{(d\,v)^2}{2}$ als der dem dynamischen Prinzip entsprechende Kraftkeim der als Kraftgrösse auftretenden Masse zu gelten hat.

65. Für den Moment des dynamischen Ausgleichs der Kräfte ist anzunehmen, dass die Gesamtkraft eines Kräftesystems gleich der Summe aus der inneren und äusseren Kraft- oder Arbeitsgrösse ist. Der Ausgleich erfolgt zwischen zwei gegen einander wirkenden Äquipotentialflächen, welche nach dem Prinzip der Äquivalenz von Wirkung und Gegenwirkung gleiche Grösse haben müssen. Bezeichnet man also die eine oder andere der beiden Kraftgrössen mit $v^2$, so ist die Gesamtkraft gleich $2\,v^2$.

Für die Kombinationsresultante $R^2$ zweier Kräfte $v_1{}^2$ und $v_2{}^2$ gilt die Gleichung:
$$R^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 + 2\,v_1\,v_2 \cos a.$$

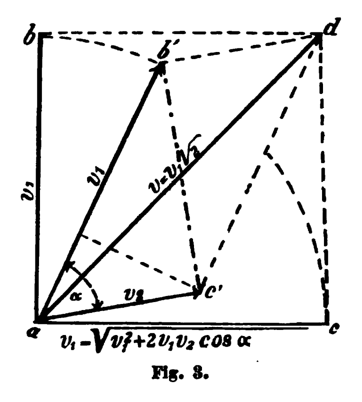


Fig. 3.

Setzt man nun $R^2 = 2\,v_1{}^2$, so erhält man die Beziehung:
$$2\,v_1{}^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 + 2\,v_1\,v_2 \cos a,$$
oder
$$v_1 \sqrt{2} = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + 2\,v_1\,v_2 \cos a}.$$

In Fig. 3 ist diese Beziehung zwischen den vektoriellen Kräften $v_1{}^2$ und $v_2{}^2$, bezw. $\frac{v_1{}^2}{2}$ und $\frac{v_2{}^2}{2}$ für
$$v_1{}^2 = \frac{v_1{}^2}{2} + \frac{v_2{}^2}{2} + v_1\,v_2 \cos a$$
diagrammatisch dargestellt.

Die beiden gegen einander arbeitenden Vektoren des Systems sind $v_1$ und $v_2$, wobei der Vektor $v_1$ als konstant angenommen ist. Wenn die Vektoren normal zu einander gerichtet sind und sich also zu einander neutral verhalten, das heisst, wenn der Winkel $a = 90°$ ist, und folglich die Bedingung $\cos a = 0$ besteht, ist die Arbeit des Systems relativ $v_1\,v_2 \cos a = 0$. Die Vektoren schwingen alsdann ohne gegenseitige Beeinflussung synchron und demnach bringt keine dieser beiden Kraftstrecken in der anderen, dazu normal gerichteten Kraftstrecke eine Bewegungsänderung, also auch nicht eine Kraft-

änderung hervor. Unter diesen Umständen sind die beiden Vektoren gleich, wie sich aus der Gleichung

$$v_1^2 - v_2^2 = 0$$

ergiebt.

Für $a = 0$ reduziert sich das Parallelogramm $abdc$ auf die Kraftstrecke der Resultante des Systems und die Arbeit $v_1 v_2 \cos a$ wird für $\cos a = 1$ ein Maximum, so dass also die Gleichung gilt:

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v^2}{2} = v_1 v_2.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$v_2 = v_1 \ (\sqrt{2} - 1).$$

Hieraus ergiebt sich angenähert $v_2 = 0._{41} v_1$. Bekanntlich wird für die absoluten Temperaturen $T_0$ und $T_1$ und die entsprechenden spezifischen Volumen $V_0$ und $V_1$ die adiabatische Zustandsänderung eines Gases oder im allgemeinen eines freien Kraftpunktsystems durch die Gleichung dargestellt:

$$\frac{T_0}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\varkappa - 1},$$

worin $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen $C_v$ zur spezifischen Wärme bei konstantem Druck $C_p$ bezeichnet, so dass $\varkappa = C_p / C_v$ zu setzen ist. Der mittlere Wert von $\varkappa$ ist aber zu $0._{41} = \sqrt{2}$ bestimmt worden. Demnach entspricht die Gleichung:

$$v_2 = v_1 \ (\sqrt{2} - 1),$$

der logarithmischen Gleichung:

$$\log\left(\frac{T_0}{T_1}\right) = (\varkappa - 1) \log\left(\frac{V_1}{V_0}\right),$$

sodass also unter den obigen Bedingungen das gedachte System der Vektoren $v_1^2$ und $v_2^2$ sich in einer adiabatischen Zustandsänderung befindet, wobei die Vektoren mit einer durch

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2} - 1$$

dargestellten Phasendifferenz gegen einander arbeiten. Es entspricht aber der Wert $\sqrt{2} - 1$ der Tangente des Winkels von $22^\circ\ 30'$ und dies ist nahezu der astronomisch bestimmte Mittelwert der Ekliptik, wodurch die Neigung der Erdachse gegen ihre Bahnebene bestimmt wird. Die obige Gleichung bestimmt also das Verhältnis der Kräfte, durch welches diese Neigung verursacht wird, und der Zustand des Sonnensystems ist dadurch als ein nahezu adiabatischer gekennzeichnet.

Der adiabatische Zustand erklärt sich dadurch, dass in diesem Falle die kugelförmig gedachte Masse im Verhältnis zu ihrem Kraftvolumen das Minimum der Kraftfläche besitzt.

66. Nach Hamiltons Prinzip der variablen Aktion (the law of varying action)*) ist das Prinzip der kleinsten Wirkung gleichbedeutend mit dem Gesetz der stationären Aktion oder gleichförmigen Wirkung, welche sich in der relativen Ruhe eines Kräftesystems als kinetischer Druck, oder andernfalls auch in gleichförmiger Bewegung, als Geschwindigkeit äussern kann. Unter Geschwindigkeit ist hier die auf eine beliebige, eigentlich aber auf die spezifische Zeiteinheit des Vorganges reduzierte Kraftstrecke zu verstehen, welche angenommenermassen als in gleichförmiger Bewegung zurückgelegt zu betrachten ist. Die Bewegung, die nicht speziell als gleichförmig bezeichnet wird, schliesst die Veränderlichkeit der Bewegung in sich, weil Kräfte stets pulsivisch wirksam sind. Die Geschwindigkeit ist stets als eine gleichförmige Bewegung anzusehen und in den Naturvorgängen hat die Geschwindigkeit nur die Bedeutung einer Tendenz der Bewegung in die Gleichförmigkeit; die Geschwindigkeit ist daher nur ein Moment der Statik in der Dynamik.

Nach C. G. J. Jacobi**) ist die Zeit aus der Gleichung der kleinsten Wirkung zu eliminieren, damit diese Gleichung den ihr zukommenden Sinn erhalte. Dies gilt aber auch für die Gleichung der grössten Wirkung, indem Minimum und Maximum im Kräftespiel zeitlose Arbeitsgrössen sind und die Mitwirkung des Zeitverlaufes nur bei Intensitäten oder Kraftstärken berechtigt ist, weil diese als Zeitfunktionen aufzufassen sind. In den Intensitäten oder Kraftstärken kommt die variable Aktion zum Ausdruck; die Kraftgrössen sind Repräsentanten der stationären Aktion, die als Minimum oder als Maximum beurteilt werden kann, jenachdem man dabei Anwachsen oder Abnahme des einen oder des anderen der beiden Arbeitsfaktoren: Geschwindigkeit oder Druck in Betracht zieht. Mit Rücksicht hierauf wurde an Stelle des Prinzips der kleinsten und grössten Wirkung, bezw. des Minimums oder Maximums von Lagrange das Prinzip der kleinsten und grössten lebendigen Kraft eingeführt, wobei man sich die lebendige Kraft $\frac{v^2}{2}$ in der Auffassung als kinetischen Druck in die beiden Wirkung und Gegen-

*) Hamilton, On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting and repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function; in den Philosophical Transactions von 1834, S. 247—308, Fortsetzung 1835 ibid. S. 95—144.

**) Vorlesungen über Dynamik, gehalten im Winter 1842—43 an der Berliner Universität; herausgegeben von A. Clebsch, Berlin 1866 (Borchardtsches Heft). Vergl. auch E. Dühring, „Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik". 2. Aufl. S. 430.

wirkung repräsentierenden Summanden $\frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{4}$ zerlegt denkt. Es wird dies sofort klar, wenn man bedenkt, dass mit Minimum und Maximum momentan vorhandene Grenzwerte des dynamischen Zustandes im Kräftespiel bezeichnet werden, das dadurch momentan statisch wird. Hamilton bestimmte die Ausdrucksform seines Prinzips, indem er die Gleichung der lebendigen Kräfte variierte, mit dem Zeitelemente behufs Elimination der Zeit multiplizierte und alsdann integrierte.

67. Bezüglich der Wirkung einer konstanten Kraft, als welche die Schwerkraft innerhalb der gewöhnlichen Wirkungsgrenzen gelten kann, ist zu bemerken, dass am Ende des zweiten Zeitintervalls des betrachteten Vorganges, das ist am Schluss des Verlaufs der zweiten beliebig angenommenen Zeiteinheit der Geschwindigkeitsentwickelung der Freifallbewegung, die zurückgelegte Kraftstrecke numerisch gleich der tendierenden Geschwindigkeit ist, mit welcher der fallende Körper seinen Weg fortsetzen würde, wenn in dem betreffenden Zeitpunkte die Schwerkraftswirkung sich nulliert. Hieraus folgt, dass für den Moment, wo in gewöhnlicher Weise mit Bezug auf den Verlauf der ersten Sekunde der Freifallbewegung die Kraftstrecke $\frac{g}{2}$ gemessen wird, die man in runder Zahl zur blossen Beispielsberechnung gleich 5 Meter setzen oder auch als Masseinheit für den Vorgang annehmen kann, eigentlich schon zwei Zeiteinheiten verflossen sind, denn durch die Division mit 2 wird die in der als erstes Zeitintervall angenommenen Sekunde auf die Zeiteinheit reduziert, so dass also das sogenannte erste Zeitintervall zwei Zeiteinheiten umfasst, wodurch die Zeitwirkung mit der Raumwirkung identifiziert und das halbierte erste Zeitintervall einer lebendigen Kraft äquivalent gesetzt wird. In der That messen wir auch die im dynamometrischen Massengewicht hervortretende Antriebskraft der Schwere durch eine Geschwindigkeit und zwar durch die am Ende des ersten Zeitintervalls tendierende Geschwindigkeit $g$, die als Beschleunigung bezeichnet wird. Es würde rationeller sein, wenn man für dieses Gewichtsmass pro Masseneinheit die zweite Potenz der Kraftstrecke $\frac{g^2}{2}$ einführte und somit den Gewichtsbegriff der Grössenordnung nach als grösste lebendige Kraft $\frac{g^2}{2}$ betrachtete, denn erst durch den mittels der Kraftstrecke $\frac{g}{2}$ ausgedrückten Antrieb entsteht die am Ende des ersten Zeitintervalls tendierende Geschwindigkeit $g$, welche alsdann, auf Grund des Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung als Summe zweier grösster lebendiger

Kräfte $\frac{g^2}{2} + \frac{g^2}{2} = g^2$ auftritt und damit den Charakter eines Potentials gewinnt.

Man denke sich nun, dass dieses Potential $g^2$, das ist die in der Flächeneinheit einer Niveau- oder Potentialfläche vorhandene Kraft oder Arbeitsgrösse in zwei gleiche Faktoren $g$ zerlegt und jeder dieser Kraftfaktoren in $n$ gleichen Impulsen $\frac{g}{n} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}$ in freien Kraftwirkungen nach dem Unabhängigkeitsprinzip abwechselnd wirksam sei. Mit Bezug auf diese Vorstellung ist anzunehmen, dass die Wirkung jedes dieser Impulse durch das arithmetische Mittel aus der Summe des Anfangs- und Endwertes der Wirkungsgrösse zum Ausdruck kommt.

Man erhält alsdann der Reihe nach die Ausdrücke:

$$\frac{1}{2}\mu^2, \quad \frac{3}{2}\mu^2, \quad \frac{5}{2}\mu^2, \quad \frac{7}{2}\mu^2 \text{ u. s. w.}$$

Für $n$ Impulse ergiebt sich demnach die Reihe:

$$\frac{\mu^2}{2}(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) = \frac{\mu^2}{2}n^2 = \frac{g^2}{2}.$$

Das ungerade letzte Glied der Reihe $(2n - 1)$ deutet an, dass der Vorgang noch nicht mit einem Ausgleich beendet, sondern ins Unendliche fortzusetzen sei. Denkt man aber daran, dass jede Naturkraft in einer endlichen Grösse gegeben ist, wie ja zum Beispiel bezüglich der Schwerkraft die Endgeschwindigkeit $g$ keinen grösseren Wert als etwa 11000 Meter annehmen kann, so ergiebt sich, dass die obige Reihe ein gerades Endglied zur Andeutung des Ausgleichs der wirksamen Kräfte erhalten muss.

In der That sind die beiden Arbeitsfaktoren, in welche nach der Annahme das Potential $g^2$ zerlegt gedacht worden ist, einander im allgemeinen nicht gleich, denn bezüglich einer Arbeitsgrösse stehen die Faktoren Druck und Geschwindigkeit, Intensität und Widerstand, Wirkung und Gegenwirkung, Selbstinduktion und Kapazität im allgemeinen im umgekehrten Verhältnis und nur im Maximum der Arbeitsstärke sind diese Summanden der Gesamtkraft und Faktoren der Arbeitsstärke einander gleich, wie schon aus der Betrachtung auf S. 115 hervorgeht und im Weiteren noch eingehender erörtert werden wird.

Mit Bezug hierauf sei der obigen Reihe die Form gegeben:

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{2}(-[-1] \pm 0 + 1 + 3 + \ldots + 2n) = \frac{\mu^2}{2}n^2 = \frac{g^2}{2}.$$

Wenn man aber den ganzen Vorgang auf zwei Zeitintervalle beschränkt, indem man sich zum Beispiel denkt, ein aus einer gewissen Entfernung

gegen das Erdzentrum fallendes Massenelement könne im luftleeren Raume durch den Erdball hindurch fallen, und somit eine freie Schwingungsbewegung mit Bezug auf das Erdzentrum als Schwingungszentrum annehmen, so erhält man den Ausdruck:

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{2}(+1 \pm 0 + 1) = \frac{\mu^2}{2} = \frac{g^2}{2}.$$

Die Zeitmessung ist hierbei auf die spezifische Zeiteinheit des Vorganges bezogen. Die Begriffe des Raumes und der Zeit fallen demnach zusammen, indem man die Intervalle des pulsierenden Vorganges oder Wellenschläge der Kraftwirkung entweder unter der Anschauungsform des Raumes, das ist der Kraftstrecke, oder unter der Anschauungsform der Zeit in Betracht ziehen kann.

Diese Anschauungsweise des Vorganges wird noch klarer werden, wenn man die bereits in Nr. 63 (S. 113) in Betracht gezogene Pendelschwingung eines Kraftpunktes noch eingehender analysiert.

68. Nimmt man an, dass mit Bezug auf Fig. 2 (S. 115) ein Kraftpunkt $P$ im Halbkreise schwingt, so ist in den höchsten Lagen dieses pendelnden Punktes im Moment der Bewegungsumkehr die als Kapazität auftretende Massenträgheit des Kraftpunktes sowie die relative Intensität oder Selbstinduktion der Schwerkraft im Maximum, denn beide Wirkungen befinden sich als kinetischer Druck im Ausgleich, dagegen sind beiderseits, das heisst mit Bezug sowohl auf den Bewegungszustand der Masse als auch des Kraftfeldes die Geschwindigkeitsentwickelungen im Minimum.

Diese Verhältnisse sind umgekehrt, wenn der Kraftpunkt durch seine tiefste Lage geht, denn alsdann ist der den Kraftpunkt antreibende Schwerdruck und ebenso natürlich Gegendruck des Kraftpunktes im Minimum, dagegen sind die sich in diesem Moment der mit Bezug auf die Kraftfeldrichtung stattfindenden Bewegungsumkehr ausgleichenden Geschwindigkeiten von Kraftpunkt und Kraftfeld im Maximum.

Der bewegte Kraftpunkt ist hierbei als eine periodische Störung des Gleichgewichtszustandes des Kraftfeldes anzusehen.

Sowohl in den höchsten Lagen des Kraftpunktes als auch in seiner tiefsten Lage ist momentan die Störung ausgeglichen, indem in beiden Fällen in Folge der Bewegungsumkehr der Bewegungs- oder Kraftwirkungszustand durch den Nullpunkt geht. Wird aber in Betracht gezogen, dass mit Bezug auf das aus den Faktoren: Druck und Geschwindigkeit gebildete Arbeitsprodukt bei der relativen Nullierung des einen Faktors der andere Faktor relativ unendlich gross erscheint, so geht zugleich auch der Kraftzustand in seinen relativen Nullierungs-

punkten durch eine relative Unendlichkeit. Die Begriffe von Null und Unendlichkeit werden aber hierbei nur durch die im logischen Denken vollzogenen Teilungen der Kraftstrecke und der Zeit in unendlich viele und daher unendlich klein werdende Teile erweckt. An und für sich sind diese Vorgänge endlicher Natur. Dies wird klar, sobald man die Dualität der Kraft, beziehungsweise die der Masse in Betracht zieht, denn irgend ein Bestehen ist nur auf Grund von Wirkung und Gegenwirkung als möglich zu erachten.

Zerlegt man also die Schwingungsarbeit zwischen Kraftpunkt und Kraftfeld als Störung des Gleichgewichtszustandes im Kraftfelde in die beiden Wirkungsfaktoren: Druck und Geschwindigkeit, so erhält man zwei um eine Schwingungsphasendifferenz von $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ gegen einander verschobene Kurven, deren Verlauf für die Doppelschwingung von $360^\circ = 2\pi$, mit Bezug auf Hin- und Hergang, durch Fig. 4 dargestellt ist. Es mag hierbei die Kurve I für den Druck, die Kurve II für die Geschwindigkeitsentwickelung gelten.

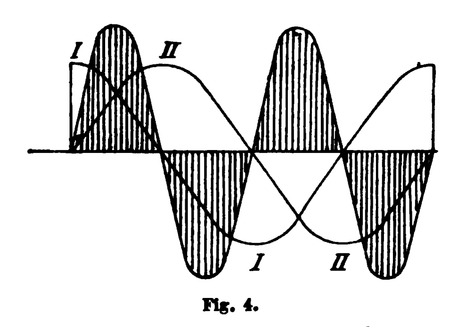


Fig. 4.

Jede dieser beiden Kurven hat zwei Maxima, ein relativ positives und ein relativ negatives, sowie zwei Minima, in denen sie durch die Neutrallinie oder Nulllinie geht, wobei natürlich die Anfangs- und Endpunkte der beiden Kurven als zusammenfallend zu denken sind. Durch das Zusammenarbeiten der beiden als Kurven I und II dargestellten Bewegungsgrössen werden vier Arbeitsgrössen gebildet, welche in den schraffierten Flächen zur Darstellung kommen. Jede dieser Kurvenflächen entspricht als Arbeitsgrösse im Ganzen einem Potential; jede Fläche ist aber aus zwei kongruenten, dreieckartigen Flächen zusammengesetzt, welche als Wirkung und Gegenwirkung zu betrachten sind, und jede solche Flächenhälfte entspricht einer lebendigen, nach Ausgleich strebenden Kraft, so dass also die Gesamtarbeit des ganzen Vorganges der Doppelschwingung gewissermassen aus der Summe von acht gleichen lebendigen Kraftgrössen zusammengesetzt ist, von denen jede auf eine spezifische Zeiteinheit des Vorganges entfällt. Bezeichnet man also die Gesamtarbeit des Vorganges mit $Q$, so ist die Arbeitseinheit, als lebendige Kraft, durch $\frac{Q}{8}$ auszudrücken. Mit einem analogen

Ausdruck wird bekanntlich in der Elektrostatik die Einheit der Spannung im Kraftfelde bezeichnet.

Die vier schraffierten Arbeitsflächen in Fig. 4 haben abwechselnd entgegengesetzte Richtung zur Neutrallinie, wodurch ihre Bedeutung als periodisch auftretende Wirkung und Gegenwirkung zum Ausdruck kommt. In der That ist bei der gedachten Pendelschwingung eines Kraftpunktes bei dem Niedergange die Schwere als Primärkraft oder induzierende Kraft und bei dem Aufgange die Trägheit des schwingenden Kraftpunktes als Primärkraft oder induzierende Kraft zu betrachten.

69. Aus der auf S. 117 angestellten Betrachtung ergiebt sich die Gleichung:

$$v_2 \sin a = v_1 \cos a,$$

welche sich ohne weiteres aus einem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 5) entwickeln lässt, dessen Katheten mit $v_1$ und $v_2$ bezeichnet sind, und worin der der Kathete $\frac{v}{2}$ gegenüber liegende Winkel gleich $a$ ist, giebt noch zu einer weiteren Betrachtung Anlass, welche hier anzustellen ist, weil dieser Gleichung eine wichtige Bedeutung zukommt. In der That ist dieselbe als die Grundgleichung der Schwingung, beziehungsweise als die Grundgleichung der Rotation zu betrachten.

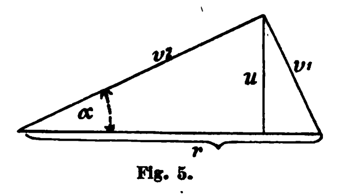


Fig. 5.

Wird in dem rechtwinkligen Dreieck Fig. 5 von der Spitze des rechten Winkels die Normale zur Hypotenuse $r$ gezogen und die Strecke der Normale, welche wie alle übrigen zur Geltung kommenden Linien als Kraftstrecke zu betrachten ist, mit $u$ bezeichnet, so gilt die Gleichung:

$$v_2 \sin a \,.\, v_2 \cos a = u^2.$$

Denkt man sich nun die mit der Hypotenuse den Winkel $a$ einschliessende Kathete allmählich so gegen die Hypotenuse geneigt, dass der Winkel $a$ unendlich klein wird, so geht natürlich auch $u$ in das Differential $du$ und ebenso $v_1$ in $dv_1$ über. Wir setzen nun $dv_1$ als Mass der Winkelgeschwindigkeit gleich Eins. Dann ist $du = \cos a$ und $dv_1 - du = 1 - \cos a = 2 \sin \frac{2a}{2} = 2\,(dv_1)^2$.

In der That wird bei der Messung der unendlich kleinen Grösse $dv_1$ der Messungsfehler, der sich in der Differenz $dv_1 - du$ darstellt, mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv oder negativ auftreten können. Dies ist in Betracht zu ziehen, denn wir haben es hier mit physi-

kalischen Thatsachen und nicht mit abstrakt mathematischen Problemen zu thun, so dass dabei die Methode der kleinsten Quadrate in Anwendung zu bringen ist*).

Wird nun das durch die Normale $du$ als Abschnitt der Hypotenuse auftretende Differential $dr$, als Urimpuls der Zentralkraft, oder mit anderen Worten: als spezifische Beschleunigung der Zentralkraft, mit $p$ bezeichnet, und für den zweifachen Tangentialimpuls $2\,(dv_1)^2$, welcher die Tangentialbeschleunigung, das heisst die am Ende der Kraftstrecke $dv_1$ tendierende Geschwindigkeit $2\,dv_1$ erweckt, $v^2$ gesetzt, so erhält man die bekannte, für die gleichförmige Bewegung in der Kreisbahn geltende Gleichung:

$$pr = v^2,$$

wobei $r = kp$ als Kraftstrecke angesehen werden muss und für $k = 1$ auch $r = p$ resultiert.

Nimmt man ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $S$ und der Höhe $\frac{R}{2}$ an, dessen Winkel an der Spitze gleich $2\,a$ gesetzt wird, so besteht zwischen den Winkeln $a$ und $2\,a$ bekanntlich die Beziehung:

$$\text{tang}\ a = \frac{2\ \text{tang}\ \frac{a}{2}}{1 - \text{tang}\ \frac{2\,a}{2}} \qquad (1)$$

oder, da nach der Voraussetzung $\text{tang}\ \frac{a}{2} = \frac{S}{R}$ ist,

$$\text{tang}\ a = \frac{2\,RS}{R^2 - S^2} \qquad (2)$$

Man kann nun die Seiten des gleichschenkligen Dreiecks Fig. 6 als zwei im Ausgleich begriffene Kräfte mit dem Zusammensetzungswinkel $a$ betrachten. Vervollständigt man das Kräfteparallelogramm, so sind $R$ und $S$ die Diagonalen desselben, so dass $R$ als die Kombinationsresultante und $S$ als die Kompensationsresultante der wirksamen Kräfte auftritt. Die Gleichung (2) kann auch die Form erhalten:

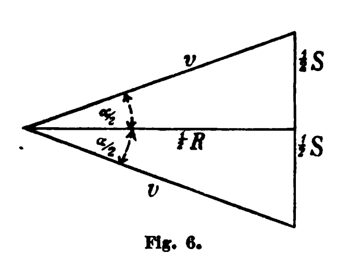


Fig. 6.

$$R^2 - S^2 = 2\,RS\ \text{cotang}\ a. \qquad (3)$$

*) Es ist hierbei stets daran zu denken, dass in der Physik nicht bloss geometrische Raumstrecken, sondern Kraftstrecken in Betracht zu ziehen sind, denn der Raum hat als Kraftfeld zu gelten. Nach dem dynamischen Prinzip kann sich keine Kraft absolut nullieren, sondern der Kraftausgleich wird als kinetischer Druck in kleinen Schwingungen stattfinden, deren Amplitude als Differential der Kraftstrecke auftritt.

Setzt man nun $v_1 = v_2 = v$, so sind $v_1$ und $v_2$ als die im allgemeinen ungleichen Kräfte des Systems anzusehen, für welche die bekannten Gleichungen gelten

$$R^2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + v_1 v_2 \cos a \qquad (4)$$

$$S^2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} - v_1 v_2 \cos a \qquad (5)$$

oder, wenn man für den momentanen Gleichgewichtszustand im schwingenden Kräftespiel $v_1 = v_2 = v$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{R^2}{2} &= v^2 (1 + \cos a) = 2 v^2 \cos^2 \frac{a}{2} \\ \frac{S^2}{2} &= v^2 (1 - \cos a) = 2 v^2 \sin^2 \frac{a}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{R^2}{4} &= v^2 \cos^2 \frac{a}{2} \\ \frac{S^2}{4} &= v^2 \sin^2 . \frac{a}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (7).$$

Durch Summierung ergiebt sich für $R^2 = S^2 = U^2$ und $a = 45^\circ$:

$$\frac{U^2}{2} = v^2.$$

Die Kraft $v^2$ wird dadurch als Antrieb, als Intensität charakterisiert, indem die Quadrate der Winkelfunktionen dem reziproken Werte der zweiten Potenz der Zeit homogen sind.

Hiermit sind die von Lagrange an Stelle des Maximums und Minimums eingeführten Begriffe der grössten und kleinsten lebendigen Kraft definiert und es haben demnach die kleinsten lebendigen Kräfte als die virtuellen Momente der im Ausgleich befindlichen Kräfte des Systems mit Bezug auf deren Resultanten zu gelten. Diese virtuellen Momente sind aber die Antriebe, welche diese Kräfte, als lebendige Kräfte $\frac{v^2}{2}$ durch Differentiation, nach der Formel:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v \,.\, d v$$

zur Fortsetzung der Wirkung auf die zeitweiligen Resultanten ausüben.

Die grössten lebendigen Kräfte sind dagegen einfach die lebendigen Kräfte $\frac{R}{2}$ und $\frac{S}{2}$ der Resultanten des Systems.

Für $a = 90^\circ$ erhält man im Moment des Ausgleichs:

$$R = S.$$

Die Gleichung (3) lässt sich aber auch noch auf andere Weise in einer allgemeineren Form entwickeln, wobei wir zu dem Begriff der Vektoren gelangen, die als duale, nach Richtung und Grösse veränderliche Kräfte auftreten.

70. Die im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Gleichung:

$$R^2 - S^2 = 2 RS \operatorname{cotang} a$$

lässt sich mit der für die gleichförmige Bewegung im Kreise geltenden Gleichung:

$$v^2 = pr$$

in Beziehung bringen.

In Fig. 7 sei $da$ ein unendlich kleiner Schwingungswinkel eines im Halbkreise unter der Einwirkung der Schwerkraft hin und her pendelnden Kraftpunktes $P$; innerhalb dieses unendlich kleinen Schwingungswinkels $da$ kann die Bewegung des Punktes $P$ als tangential geradlinig und daher als gleichförmig betrachtet werden, denn die Gleichförmigkeit einer Bewegung kann nur innerhalb der Geradlinigkeit der Bewegung stattfinden, weil jede Richtungsablenkung auch mit einer Geschwindigkeitsänderung verknüpft ist. Indem alsdann der Punkt $P$ weiter schwingt sucht der Punkt in freier Bewegung die Kraftstrecke rechtwinklig zum momentanen Schwingungsradius $OP$ mit gleichbleibender Geschwindigkeit fortzusetzen. Durch die radiale Wirkung der Zentralkraft wird er jedoch in eine normale Richtung gegen den unendlich nahe an $OP$ liegenden nächsten Radius $Oa$ gedrängt, wobei diese drängende Kraft aber nicht als eine vom Zentralpunkte $O$ aus wirkende Zugkraft, sondern als eine vom äusseren Kraftfelde ausgehende Druckkraft zu denken ist, indem ein freies, gewissermassen als Ballungsakt wirksames Kräftespiel zu denken ist. Der durch den halben unendlich kleinen Kontingenzwinkel $da = \frac{1}{2} w$ schwingende Kraftpunkt pendelt demnach in radialer Richtung bis zum Punkte $b$, das heisst bis zum Fusspunkte der vom Orte $P$ aus auf den unendlich nahe an $OP$ liegenden Schwingungsradius gefällten Normalen $Pb$. Indem alsdann der Punkt durch die zweite Hälfte des Kontingenzwinkel $w$ schwingt, gelangt er bis zu dem unendlich nahe an $b$ liegenden Orte $P'$, worauf die Bewegung des Kraftpunktes $P$ sich in ähnlicher Weise als Wellenbewegung bald jen-

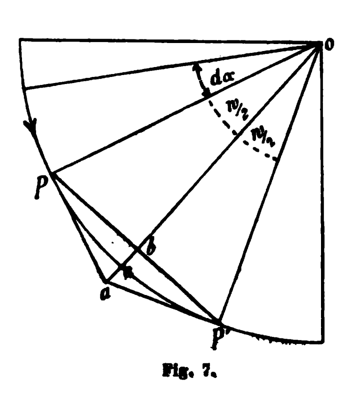


Fig. 7.

seit bald diesseit der geometrischen Kreisbahn fortsetzt, durch welche der mittlere Pfad des bewegten Punktes zur statischen Darstellung kommt.

Wir bezeichnen nun die Kraftstrecke $Pc$ mit $\frac{R}{2}$ und $ac = cb$ mit $\frac{S}{2}$, so dass in ähnlicher Weise wie auf S. 128 mit Bezug auf Fig. 6 die Gleichung zu entwickeln ist:

$$R^2 - S^2 = 2\,RS \text{ cotang } a.$$

Es ist aber mit Bezug auf Fig. 8 die Differenz $\frac{R^2}{4} - \frac{S^2}{4} = v^2$, oder $R^2 - S^2 = 4\,v^2$, indem mit $Pc = v$ die in der Kreisbahn während der spezifischen Zeiteinheit $dt$ (als unendlich kleines Zeitintervall) durchlaufene Kraftstrecke beziehungsweise die gleichförmig gedachte (mittlere) Geschwindigkeit des Kraftpunktes $P$ in der Kreisbahn bezeichnet wird. Ferner ist $\frac{S}{2}$ als Beschleunigung in der Radialrichtung gleich $p$, also $S = 2p$ und der Schwingungsradius $OP$ mit $r$ anzunehmen. Mit Rücksicht auf die unendliche Kleinheit des Kontingenzwinkels ist $Pa = Pl = r$ zu setzen und demzufolge ist $2r = R$ cotang $\frac{w}{2}$ zu setzen. Hieraus ergiebt sich ohne weiteres die Identität der obigen Gleichung mit der bekannten Gleichung:

$$v^2 = pr.$$

Für die weitere Betrachtung ist auf die auf S. 115 mit Bezug auf Fig. 2 behandelte Pendelschwingung zurückzugehen. Rücksichtlich der beiden Faktoren der Kraftleistung des durch das Schwerkraftsfeld und den schwingenden Kraftpunkt $P$ gegebenen Kräftesystems kann man annehmen, dass die Kraftleistung sich gewissermassen aus zwei Kreisläufen (Kreisbahnkomponenten) vom halben Radius $\varrho = \frac{r}{2}$ zusammensetzt, wie Fig. 8 darstellt.

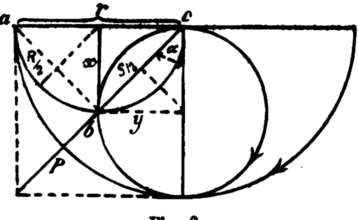


Fig. 8.

Die vertikalen Abscissen $x$ gelten dann zur Darstellung der Geschwindigkeiten und die horizontalen Ordinaten $y$ zur Darstellung der in den Äquipotentialflächen des Kraftfeldes stattfindenden Pressungen oder Antriebsstärken, denen der schwingende Kraftpunkt $P$ in den aufeinanderfolgenden Orten seiner Kreisbahn unterliegt. Die Geschwindigkeiten sind hierbei dem Kraftaufnahmevermögen oder der Kapazität,

beziehungsweise dem Widerstreben oder der Selbstinduktion des schwingenden Kraftpunktes proportional und können daher unter dem Gesichtspunkte des Widerstandes aufgefasst werden, wie dies ja bezüglich des Ohmschem Widerstandes im umgekehrten Sinne geschieht, der bekanntlich als Geschwindigkeit definiert, oder — in etwas geschraubter Weise (weil der Sinn nicht klar ist) — einer Geschwindigkeit homogen gesetzt wird*).

Die Antriebsstärke $y$ des Kraftfeldes wirkt am stärksten auf den Kraftpunkt ein, wenn derselbe sich in der höchsten Lage, das ist in der durch den Schwingungsmittelpunkt $O$ gelegt gedachten Neutralebene, also in der horizontalen befindet. Die Selbstinduktion des Kraftpunktes ist dann relativ Null, seine Kapazität relativ unendlich gross gegenüber der verschwindend kleinen Geschwindigkeitsentwickelung des Kraftfeldes. In der tiefsten Lage des Kraftpunktes ist die Antriebsstärke des Kraftfeldes auf den schwingenden Kraftpunkt relativ gleich Null, das heisst, der Kraftpunkt durchschwingt in seiner tiefsten Lage im harmonischen Kräftespiel während des Intervalls zwischen zwei Schwerkraftsimpulsen den unendlich kleinen, weil unmessbaren Bogen $2 \,.\, da$ unter der Wirkung des Schwerkraftantriebes:

$$r \sin a = x \sin a = x \,.\, da,$$

wobei $r$ und $x$ als unendlich wenig von einander verschieden zu denken sind, indem der Äquipotentialfläche, durch welche der Kraftpunkt $P$ in seiner momentanen Horizontalschwingung hindurchgeht, eine gewisse, wenn auch unendlich kleine Dicke zuzuschreiben ist, indem jede Äquipotentialfläche physikalisch als ein körperliches Etwas betrachtet werden muss und keineswegs als im abstrakt geometrischen Sinne nur als rein zweidimensional betrachtet werden darf. Trotzdem wird auch physikalisch eine solche Äquipotentialfläche durch $L^2$, das heisst als zweidimensional definiert, weil man relativ zur motorischen Kraft $L^3$ die dritte Dimension der Äquipotentialfläche gleich der spezifischen Einheit $L^0 = 1$ setzt, um für die logischen Operationen eine Verschiedenheit in den Kategorien der Kraftbegriffe zu erhalten.

In dem Wirkungsmoment, welcher durch den Schnittpunkt der beiden Kreisbahnkomponenten des schwingenden Kraftpunktes markiert ist, besteht die Gleichung $x = y = v$ und daher müssen für diesen Moment die auf S. 129 entwickelten Gleichungen (7) gelten,

*) Hospitalier bemerkt darüber in seinem Buche „Traité élémentaire de l'Énergie électrique", p. 115: „La résistance dans le système électromagnétique, est donc homogène à une vitesse, mais on n'est pas autorisé à en conclure que la résistance est une vitesse, comme on le dit quelque fois". Weshalb man aber den Widerstand der Geschwindigkeit homogen setzt, wird von Hospitalier nicht erklärt.

indem in diesem Moment der kinetische Druck in Folge der Gleichheit von motorischer Kraft und motorischer Gegenkraft in seinen Maximalwert $\frac{R^2}{4} + \frac{S^2}{4} = v^2 \cos^2 45^\circ + v^2 \sin^2 45^\circ = v^2$ eintritt.

Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt, dass eine Ausgleichung der Potentiale, $R^2$ und $S^2$, beziehungsweise der Resultanten $R$ und $S$ der Linearkräfte oder Differentialquotienten der lebendigen Kräfte $\frac{v_1^2}{2}$ und $\frac{v_2^2}{2}$ nach der Formel $\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dv} = v$, stattfindet, wenn der Zusammensetzungswinkel $a$ in den Maximalwert $a = 90^\circ$ eintritt, wobei die in den neutralen Zustand übergehenden Linearkräfte oder Bewegungsgrössen (bezw. Galileischen Momente) $v_1$ und $v_2$ einander gleich werden, weil ihre Ausgleichsarbeit $v_1 v_2 \cos a$ für $a = 90^\circ$ sich nulliert.

71. Die Gleichheit der zusammenwirkenden Kräfte $v_1^2$ und $v_2^2$ ergiebt sich ohne weiteres schon aus der Voraussetzung, dass dieselben als Flächenkräfte für ein und dieselbe Äquipotentialfläche zur Geltung kommen, und dass sie in ihrer wechselseitigen Beziehung dem Prinzip der Äquivalenz von Wirkung und Gegenwirkung entsprechen müssen. Es gewinnt hierdurch das Prinzip der Flächen eine besondere Bedeutung; dasselbe besagt, dass die in ein und derselben Kraftsphäre oder Äquipotentialfläche wirksamen Kräfte in ein und demselben Zeitverlaufe gleiche Arbeitsgrössen entwickeln, welche in den von den Radien beschriebenen Flächen zum Ausdruck kommen.

Unter der Voraussetzung der auf das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung vorausgesetzten Gleichheit der in einem System wirksamen Potentialgrössen $v_1^2$ und $v_2^2$ gleich $v^2$ geht aus den Gleichungen (6) bezw. (7) hervor, dass für $a = 45^\circ$ abermals eine Ausgleichung der Kräfte stattfindet. Demnach werden bezüglich eines in einer Kreisbahn unter dem Einfluss der Schwere schwingenden Kraftpunktes acht Orte der Kraftausgleichung vorhanden sein, welche in Intervallen von $\frac{\pi}{4}$ Schwingungsphase aufeinanderfolgen. An einem Orte ist die Schwerkraft im Maximum, an dem diametralen Orte relativ im Minimum; normal diametral zu diesen Orten sind zwei Neutralstellen vorhanden und zwischen den somit sich ergebenden, um $\frac{\pi}{2}$ auseinander liegenden Orten befinden sich als mittlere Orte des Kraftausgleichs zwischen Schwere und Trägheit noch vier Orte. Hiernach findet an zwei diametralen Orten der freie Ausgleich zwischen den beiden Faktoren der Drehkraft: Zentral- und Tangentialkraft, statt; ferner gleicht sich an zwei diametralen Orten die Zentralkraft mit der

Schwere aus und endlich findet an vier paarweis normal diametralen Orten der Ausgleich zwischen den Resultanten der Drehkraft und des Schwerkraftfeldes statt, welche Beziehung in den Gleichungen (6) bezw. (7) zum Ausdruck kommt.

Diese Beziehungen zwischen den beiden dualen Kraftgrössen: Drehkraft und Schwerkraft, kann jedoch erst stattfinden, wenn die Ausgleichsarbeit gleich der Differenz der resultierenden Potentiale dieser Kraftgrössen ist, das heisst, wenn die Gleichung (3) (auf S. 128)

$$\frac{R^2}{2} - \frac{S^2}{2} = RS$$

für $a = 45^\circ$ erfüllt wird.

Aus Gleichung (3)

$$R^2 - S^2 = 2\,RS \text{ cotang } a$$

folgt für $a = 0$:

$$\frac{R^2}{2} = R\,\frac{0}{0} = R\,k_1,$$

wobei $k_1$ als ein unbestimmter, weil von der Konstanten des jeweiligen Kraftfeldes abhängiger, dabei aber auch der Kraftstrecke $R$, das heisst der Entfernung vom Kraftzentrum umgekehrt proportionaler Koeffizient auftritt, der je nach der Auffassung als Widerstand, Kapazität oder Selbstinduktion bezeichnet werden kann.

Für $a = 90$, das ist für cotang $a = 0$, folgt aber aus obiger Gleichung nach Zerlegung der Differenz $R^2 - S^2$ in das Produkt $(R + S)(R - S)$ und unter der Bedingung $R = S = U$

$$U = k_2,$$

das heisst, die beiden dualen Kräfte $R^2$ und $S^2$ sind einander gleich und bilden ein im dynamischen Gleichgewicht befindliches wirksames System, so dass man setzen kann

$$R^2 = RS \text{ und } S^2 = RS.$$

Hierbei ist stets daran zu denken, dass (nach S. 129) $\frac{S}{R} = \text{tang } \frac{a}{2}$ und daher der Schwingungswinkel, unter welchem der Ausgleich der beiden Kraftfaktoren $R$ und $S$ nach der einen oder anderen Seite erfolgt, gleich $a$ ist, wie aus Fig. 7 hervorgeht.

Da nun $R$ (nach Fig. 7) als Zentralkraft, beziehungsweise als Zentripetalkraft, und $S$ als Tangentialkraft, beziehungsweise als Zentrifugalkraft angesehen werden kann, so geht daraus hervor, dass der Winkel $a$ beziehungsweise der Winkel $\frac{a}{2}$ von der Winkelgeschwindigkeit des schwingenden oder rotierenden Systems abhängig ist.

72. Das Prinzip des Maximums und Minimums, welches in den beiden vorhergehenden Paragraphen zum Ausdruck gebracht ist, hat den Physikern viel zu schaffen gemacht und ist eigentlich bis heute noch nicht zur vollen Klarheit gebracht worden. Die vorhergehenden Betrachtungen dürften jedoch zur Aufklärung dieses wichtigen Prinzips keinen unwesentlichen Beitrag liefern.

W. Wundt bemerkt darüber in seiner Methodenlehre*):

„Sobald das Ergebnis mechanischer Betrachtungen in die Form gebracht ist, dass irgend eine bei einem mechanischen Vorgange resultierende Grösse als eine solche bezeichnet wird, die entweder einen Maximal- oder Minimalwert annehme, so liegt darin an und für sich eine Anwendung des teleologischen Gesichtspunktes; denn die relative Grösse des Erfolgs ist hier massgebend für die Aufstellung der Bedingungen, und es tritt somit die für das Zweckprinzip charakteristische Umkehrung der Kausalbeziehungen ein. Ein leicht begreifliches Motiv hat nun ausserdem in diesem Falle die Minimalwerte bevorzugen lassen. Geht man nämlich von den technischen Anwendungen der Mechanik aus, so wird die Zweckmässigkeit irgend einer mechanischen Vorrichtung, einer Maschine z. B., zunächst danach beurteilt werden, ob der zur Wirkung kommende Aufwand an Kraft dem von der Maschine zu leistenden Nutzeffekt möglichst zu statten kommt oder nicht. Eine Maschine wird offenbar dann am zweckmässigsten konstruiert sein, wenn ein gegebener Nutzeffekt durch einen möglichst geringen Kraftaufwand erreicht wird. Für eine Zeit, welche die Natur mit Vorliebe unter dem Gesichtspunkte des Nutzens auffasste, lag es nun nahe, diese technische Betrachtungsweise auf die natürlichen Bewegungssysteme zu übertragen. Rein logisch beurteilt würde man ebensogut zu einem Maximal- wie zu einem Minimalprinzip gelangen können. Denn ob ich einen gegebenen Effekt als einen möglichst grossen oder den Kraftaufwand, der zu ihm geführt hat, als einen möglichst kleinen bezeichne, ist für das thatsächliche Verhältnis gleichgültig. Aber der teleologische Standpunkt begünstigt hier die Form des Minimalpinzips, da derselbe, von der Folge zum Grunde zurückgehend, zu der Frage führt, wie ein gegebener Effekt unter möglichst günstigen Bedingungen entstehen könne, worauf nun als quantitativer Ausdruck dieser Bedingungen am natürlichsten ein Minimum an Kraftaufwand sich herauszustellen scheint".

Das Prinzip der kleinsten Wirkung wurde wohl zuerst von dem genialen Mathematiker Fermat in dem angedeuteten teleologischen Sinne formuliert. Indem sich Fermat mit einer Methode für Maxima

*) Logik, 2. Bd. 1. Aufl. S. 262.

und Minima beschäftigte, die als Keim der Differentialrechnung angesehen werden kann, scheint seine Auffassungsweise mechanischer Vorgänge sich in der oben angedeuteten Richtung bewegt zu haben und zwar insbesondere bei seinen Untersuchungen über das Cartesische Gesetz der Lichtbrechung auf den Gedanken, dass die Natur bei der Fortpflanzung der Bewegung die Methode der Minimalwirkung befolge. In einem Briefe Fermats*) kommt die Stelle vor: „Ich habe kein zuverlässigeres Mittel als die Brechungen (des Lichts) in dem einzigen Prinzip zu suchen, dass die Natur immer auf dem kürzesten Wege thätig ist". Es lasse sich, meint Fermat, auf diese Weise der Punkt der Brechung bestimmen. Der Beweis, welcher von ihm für das Prinzip als den letzten Grund des Sinusgesetzes der Lichtbrechung an der Grenze verschiedener Medien geometrisch geführt wird, hat zum eigentlichen Thema den Umstand, dass von einem Punkte des einfallenden zu einem Punkte des gebrochenen Strahls jeder Weg, der durch einen anderen Einfallspunkt führte, mit mehr Widerstand (Kapazität des Mediums) verknüpft und zeitlich länger sein würde, als der ursprünglich nach der Brechungsregel vorauszusetzende Weg. Da die Widerstände in den beiden Medien verschieden sind, so ist die geringste Widerstandssumme und mithin auch die kürzeste Zeit für den ganzen Weg und den Winkel, in welchem sich derselbe am Einfallspunkte bricht, das Massgebende.

Ähnliche Erwägungen waren es, durch welche im Jahre 1746 Maupertuis zu dem Prinzip der kleinsten Aktion geführt wurde**). Der von diesem aufgestellte Satz lautet: „Wenn in der Natur eine Veränderung vor sich geht, so ist die für diese Veränderung notwendige Thätigkeitsmenge nach Möglichkeit die geringste". Hierbei wird die Wirkungsmenge als das Produkt von drei Faktoren: Masse, Geschwindigkeit und Weg definiert und von den Begriffen Thätigkeit und Veränderung Gebrauch gemacht. Als Veränderung wird von Maupertuis bald, wie bei dem Stoss der Körper, die Differenz der lebendigen Kräfte, bald, wie bei der Brechung und Reflexion des Lichtes, die Summe der Wirkungsgrössen oder sogenannten Aktionsmengen vor und nach dem Ereignis in Betracht gezogen, wie dies in ähnlicher Weise durch die auf S. 129 entwickelten Gleichungen (4 und 5):

$$v_1^2 - v_2^2 = \pm 2 v_1 v_2 \cos a$$

oder

$$v_2^2 \pm 2 v_1 v_2 = v_1^2,$$

*) Fermat, „Varia opera mathematica". Tolosae 1679. S. 156. Vergl. Dührings Kritische Geschichte der Grundprinzipien der Mechanik. 2. Aufl. S. 101.

**) Man vergl. hierzu: Ad. Mayer, „Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion". Leipzig 1877.

sowie auf S. 117 für $\alpha = 45^\circ$ durch die Gleichungen:

$$v_1{}^2 + v_2{}^2 = \frac{v_1 v_2}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{v^2}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

oder

$$\frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = v^2$$

zum Ausdruck kommt.

In den Aufstellungen von Maupertuis hat demnach die kleinste Wirkung oder das Minimum der Aktionsmenge in den verschiedenen Fällen auch eine sehr verschiedene physikalische Bedeutung. Übrigens wurde bald darauf von d'Arcy der Nachweis geliefert, dass bei der Lichtbrechung auch gelegentlich das Minimum in ein Maximum umschlagen kann. Auch von Euler wurde das Prinzip der kleinsten Wirkung bei seinem Studium der isoperimetrischen Aufgaben in Betracht gezogen. Seine Abhandlung über die Kurven mit maximalen und minimalen Eigenschaften erhielt ihren Abschluss durch die Bestimmung der Bewegung eines geworfenen Körpers nach der Methode der Maxima und Minima. Hierbei wurde aber nicht bloss die parabolische Wurfbewegung berücksichtigt, sondern die Betrachtung ganz allgemein auf die Bewegungen der Körper unter dem Einflusse von Zentralkräften, die nach Distanzfunktionen wirksam sind, ausgedehnt. Auf diese Abhandlung wurde von Maupertuis ausdrücklich Bezug genommen, obschon Euler auf die metaphysische Deutung des Prinzips der kleinsten Wirkung kein besonderes Gewicht legt, indem es ihm hauptsächlich auf die analytische Behandlung der bezüglichen Aufgaben ankam, in welcher er den Grund zu der Variationsrechnung legte, die später von Lagrange erweitert und systematisch festgestellt worden ist.

Nach Euler ist ein ähnliches Produkt der sogenannten Aktionsmenge, wie es Maupertuis in der Form $mvs$ aufstellte, aber in der differentiellen Form $mv\,ds$ in Betracht gezogen worden, dessen Integral zwischen zwei Punkten oder zwischen den entsprechenden Zeitgrenzen die Eigenschaften besitzen muss, dass seine Variation gleich Null gesetzt werden kann, wobei Euler dieses Integral als ein Minimum ansieht. Es stimmt dieser Begriff mit dem Begriff der kleinsten lebendigen Kraft überein, deren Symbol auf S. 129 in der Formel (7) durch $\frac{R^2}{4}$ bezw. $\frac{S^2}{4}$ bestimmt worden ist. Das Differential ergiebt dann die Form $\frac{v\,.\,dv}{2}$ für die Masseneinheit $m^0 = 1$, also mit Berücksichtigung des Massenfaktors $m$ und der Gleichung $\frac{dv}{2} = ds$ das Eulersche Produkt $mv\,ds$.

Lagrange, dem es als Mathematiker weniger um die Aufstellung logischer Begriffe, als um die Rechnungsformeln zu thun war, fasste nur die Bedingungen ins Auge, unter denen die Variation gleich Null gesetzt werden konnte. Diese Möglichkeit der Nullierung der Variation ist aber ebenso gut das Kennzeichen eines Maximums, als eines Minimums.

Denkt man sich in der auf S. 134 entwickelten Gleichung:

$$R^2 - S^2 = 2RS$$

die dualen Faktoren $R$ und $S$ nach ihrer Bedeutung

$$R^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha$$
$$S^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha$$

für $\cos \alpha = 1$ und $v_1^2 = v_2^2 = v^2$ in ihre Faktoren zerlegt, wobei $v^2$ als ein Produkt zweier nach dem Sinus und Cosinus veränderlicher Faktoren $u_1$ und $u_2$ angesehen werden kann, so wird der eine dieser Faktoren ein Maximum werden, wenn der andere ein Minimum wird und umgekehrt.

Indem Euler das Prinzip nur für einen einzelnen Körper, das heisst mit anderen Worten: für ein Massensystem in einer Äquipotentialfläche entwickelte, konnte er die Masse unberücksichtigt lassen, wie in unseren Betrachtungen in demselben Sinne geschieht.

Mit Rücksicht hierauf wurde von Euler das Integral unmittelbar auf das Produkt von Geschwindigkeit und Raumelement (Kraftstreckeneinheit) oder auf das Produkt von Geschwindigkeitsquadrat und Zeit bezogen, wie dies auch in den Formeln (6) bezw. (7) auf S. 129 geschieht, wo die Zeit in der Form einer Winkelfunktion, das heisst als verhältnismässiger Teil des Schwingungsbogens zum Ausdruck kommt.

Da der Begriff des Raumes als Kraftfeld und der Raumstrecke als Kraftstrecke Euler sowohl wie Lagrange noch fremd war, konnten deren Betrachtungen auch noch nicht die physikalische Bedeutung gewinnen, welche mit Berücksichtigung dieser Begriffe zu gewinnen sind. Euler selbst war, wie Dühring in seiner „Kritischen Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik“ *) ausführt, über die Tragweite des Prinzips vom Maximum und Minimum, nach eigenem Eingeständnis, nicht ganz sicher. Seine Erläuterungen beschränken sich auf die Bewegung eines als Punkt gedachten Körpers, der von einer Beharrungsgeschwindigkeit angeregt ist und ausserdem noch der Einwirkung von Zentralkräften unterliegt, wie solche bei den Planetenbewegungen wirksam sind. Euler beginnt mit dem einfachsten Fall, wo gar keine Kräfte wirken, und behandelt alsdann die allein vorhandene Beharrungs-

*) 2. Aufl. S. 295.

geschwindigkeit nach seinem Prinzip. Da diese Beharrungsgeschwindigkeit konstant ist, so muss das Raumelement, das heisst mit anderen Worten: die als kinetischer Druck wirksame Selbstinduktion des räumlichen Kraftfeldes (bezw. die dynamische Widerstandsstärke des Kraftfeldes) ein Minimum sein und daher in die gerade Linie (bezw. in die momentane Tangentialstrecke) übergehen. Das nächste von Euler behandelte Beispiel bezieht sich auf die gewöhnliche Wurfbewegung im Niveau der Erdoberfläche, das heisst unter der gewöhnlich als konstant angenommenen Wirkung der Schwerkraftsbeschleunigung, aber ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes, wobei natürlich sich die Parabel als die Kurve des fraglichen Minimums der Kraftbethätigung ergiebt. Hierauf geht Euler zur freien Zentralbewegung mit Berücksichtigung des Gravitationsgesetzes über. Ausdrücklich weist er dabei darauf hin, dass der Widerstand eines Mediums ein Fall sei, der sich nicht unter das Prinzip der kleinsten Wirkung bringen lasse, wobei Euler übersehen hat, dass dies bei Eintritt gleichförmiger Bewegung doch der Fall ist.

Mit Rücksicht hierauf ist auf eine Abhandlung von Lejeune-Dirichlet hinzuweisen, welcher ein prinzipielles Interesse zuerkannt werden muss. Es wird in dieser Abhandlung*) die Bewegung einer festen kugelförmig gedachten Masse in Betracht gezogen, welche in einem unendlich ausgedehnten unzusammendrückbaren Fluidum vor sich geht. Das System, das heisst bewegte Masse und Kraftfeld, oder mit anderen Worten das einer Störung unterworfene Kraftfeld, wird hierbei als ein Spiel freier Kräfte betrachtet. Dabei kommt Lejeune-Dirichlet zu der Schlussfolgerung, dass der bei dieser Bewegung vorauszusetzende Widerstand keineswegs der Vorstellung entspricht, welche man sich von der Wirkung eines flüssig gedachten Mediums auf einen in ihm bewegten festen Körper zu machen pflegt und wonach ein Widerstand auch dann schon vorhanden und zu überwinden ist, wenn die in einem Zeitmoment stattfindende Geschwindigkeit sich für das nächste Zeitintervall nicht verändern soll, wogegen nach seinen analytischen Aufstellungen die Bewegung des festen Körpers augenblicklich in eine geradlinige und gleichförmige übergeht, sobald die beschleunigende Kraft zu wirken aufhört. Der Widerstand — meint Dirichlet — sei somit gar nicht von der vorhandenen Bewegung, sondern nur von der im nächsten Zeitintervall hervorzubringenden Änderung der Bewegung abhängig.

Offenbar hat hierbei Dirichlet den Begriff der kleinsten lebendigen Kraft, wie dieser auf S. 129 entwickelt worden ist, ausser acht

*) Monatsberichte der Berliner Akademie für 1852.

gelassen. Es ist wohl ohne weiteres klar, dass das Minimum des Kraftaufwandes und somit auch das Minimum des Widerstandes oder der Selbstinduktion des Kraftfeldes vorhanden ist, wenn die Beschleunigung der wirksamen Primärkraft in ihr Minimum eintritt und somit ein relativ konstanter, das heisst ein in seinen schwingenden Kraftänderungen im relativ Unendlichkleinen sich für die Messungsmethoden verlierender kinetischer Druck stattfindet.

73. Von Lagrange, dessen Genie die analytische Methode ausserordentlich viel verdankt, was rühmend anzuerkennen ist, wurde das Prinzip des Maximums und Minimums auf das Prinzip der grössten und kleinsten lebendigen Kraft zurückgeführt, welche Begriffe auf S. 129 definiert worden sind; gleich allen anderen zusammengesetzten Prinzipien leitete er dasselbe aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ab. Es ist hier auch noch darauf hinzuweisen, dass in der analytischen Mechanik von Lagrange die den analytischen Betrachtungen vorangehenden historischen Skizzen über die Prinzipien fast von noch grösserem Werte sind, als die analytischen Betrachtungen selbst. Unzweifelhaft sind aber die besten Bestandteile der heutigen Lehrbücher der analytischen Mechanik diejenigen, welche direkt oder indirekt dem klassischen Lagrangeschen Werke entnommen worden sind.

In Anknüpfung an die von Lagrange aufgestellte Formulierung des Prinzips der geringsten Wirkung und durch Berücksichtigung der Gleichung der lebendigen Kräfte hat Hamilton gegen Ende der zwanziger Jahre dieses Jahrhunderts eine neue analytische Form der allgemeinen mechanischen Beziehungen aufgestellt, welche unter der Bezeichnung „Hamiltonsches Prinzip“ bekannt ist. Dühring bemerkt in seiner schon öfters von uns zitierten Preisschrift*) darüber Folgendes:

„Diese neue Form ist in der That eine erhebliche Annäherung an die Lösung des Problems, zu Lagranges universeller Gleichung (vergl. S. 45) der Dynamik eine Stammgleichung oder wenigstens allgemeine Typen oder Charaktere zu einer solchen, das heisst letzte Integrationsgestalten aufzufinden. Die grosse Allgemeinheit, vermöge deren sich aus einer solchen abschliessenden Integralform die sämtlichen typischen Hauptsätze der Mechanik durch Herstellung der betreffenden Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung gewinnen lassen müssten, würde sogar dazu nötigen, ein derartiges Prinzip, wenn es in befriedigender Fassung vorhanden wäre, als die Wurzel aller übrigen zu betrachten.“

Hamilton selbst bezeichnete sein Prinzip als dasjenige der veränderlichen Aktion und erblickte im Prinzip der geringsten Wirkung

*) a. a. O. S. 495.

nur ein Gesetz der stationären Aktion oder des kinetischen Druckes bezw. der gleichförmigen Bewegung. Das Prinzip der veränderlichen Aktion ist von uns schon auf S. 40 gekennzeichnet worden.

C. G. J. Jacobi, welcher das Prinzip der geringsten Wirkung kritisierte, erklärte, dass er sich von der analytischen Fassung, welche Lagrange diesem Prinzip gegeben hatte, nicht befriedigt fühle. Er bezeichnete dieses Prinzip als das des „geringsten Kraftaufwandes" und war der Ansicht, dass dieses Prinzip nur innerhalb der Vorbedingungen, unter denen auch die Gleichung der lebendigen Kräfte mit dem ihr entsprechenden Prinzip zutrifft, das heisst nur dann Geltung erhalte, wenn die für den Ausdruck des Systems aufgestellten Gleichungen die Zeit nicht im besonderen Symbol enthalte, weil die Zeit aus der Gleichung des geringsten Kraftaufwandes zu eliminieren sei, wenn diese Gleichung den ihr beizulegenden Sinn erhalten solle.

Die letzte und zur Zeit gültige Formulierung der Maximal- und Minimalprinzipien ist von Gauss im Prinzip des kleinsten Zwanges aufgestellt worden*).

Nach ihm erfolgen die Bewegungen eines Massen- bezw. Kräftesystems, ohne weitere Rücksicht auf die Zusammensetzung, in jedem Zeitpunkte in möglichst grosser Übereinstimmung mit der freien Bewegung, also unter dem kleinsten Zwange. Als Mass des Zwanges wird dabei die Summe der Produkte aus dem Quadrat der Ablenkung jedes Punktes von der freien Bewegung in seine Masse betrachtet. Es wird hierbei demnach von Gauss die Abweichung der gezwungenen von der freien Bewegung nach einer ähnlichen Betrachtungsweise beurteilt, wie sie bei der Methode der kleinsten Quadrate in Bezug auf Ausgleichung der Beobachtungsfehler stattfindet. Mit Rücksicht hierauf bemerkte Gauss, die Natur verfahre, wenn ihr die Bewegungen durch irgend welche hemmende Bedingungen modifiziert werden, in derselben Weise wie der rechnende Mathematiker, wenn er Erfahrungen ausgleicht, die sich auf von einander abhängige Grössen beziehen.

Wir haben auf S. 129 in ähnlicher Weise das Prinzip des kleinsten Zwanges behandelt.

74. Nach Paragraph 68 entspricht die relativ grösste lebendige Kraft, mit welcher eine Kraft $v_1^2$ bei der Zusammensetzung mit einer zweiten Kraft $v_2^2$ unter dem Winkel $\alpha$ auf letztere einwirkt, der zweiten Potenz des virtuellen Moments $v_1 \cos \alpha$, wodurch die Arbeitsgrösse $v_1 v_2 \cos^2 \alpha$, oder für den Ausgleich beider Kräfte, $v^2 \cos^2 \alpha$ zum Aus-

*) Gauss' Werke, V, S. 25. Vergl. auch Wundt, „Methodenlehre", S. 264.

druck kommt; da dieser Ausgleich sich (nach S. 133) bei $a = 45^\circ$ vollzieht, so ergiebt sich dafür der bekannte Ausdruck $\frac{v^2}{2}$.

Die kleinste lebendige Kraft tritt dagegen auf, wenn sich der Schwingungswinkel $2\frac{a}{2}$ (nach S. 117) der Grenze Null nähert, wobei die Kraftgrösse durch $v^2 \cos^2 \frac{a}{2}$ ausgedrückt wird und daher $a = 45^\circ$ $\frac{v^2}{4}$ resultiert.

Sind nun zwei Linearkräfte oder Bewegungsgrössen $v_1$ und $v_2$ nach der Herleitung

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{d\,v} = v$$

(nach S. 111) gegeben, deren Zusammensetzungswinkel $a$ ist, so werden in diesem Kräftesystem einerseits die virtuellen Momente in den beiden Kraftrichtungen und anderseits die virtuellen Momente in den Normalen zu beiden Kraftrichtungen zu Wirkungen kommen.

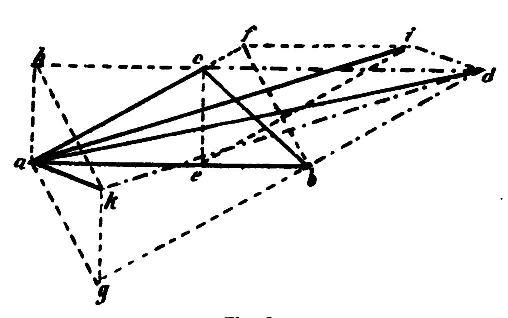



Fig. 9.

In Fig. 9 sind $ab = v_1$ und $ac = v_2$ die beiden sich unter dem Winkel $a$ zusammensetzenden Bewegungsgrössen. Die virtuellen Momente in die gegenseitigen Richtungen sind gegeben durch

$$ae = v_1 \cos a \text{ und } af = v_2 \cos a.$$

Die virtuellen Momente in die Normalen zu den beiderseitigen Richtungen sind gegeben

$$ag = v_1 \sin a \text{ und } ah = v_2 \sin a.$$

Bestimmt man für jedes dieser Momentenpaare die Resultante nach dem Parallelogrammgesetz, so erhält man:

$$(a\,i)^2 = P^2 = v_1{}^2 \cos^2 a + v_2{}^2 \cos^2 a + 2\,v_1\,v_2 \cos^3 a$$

und

$$(a\,k)^2 = Q^2 = v_1{}^2 \sin^2 a + v_2{}^2 \sin^2 a + 2\,v_1\,v_2 \cos a \sin^2 a.$$

Bezüglich der beiden Diagonalen des ursprünglichen Kräfteparallelogramms $abdc$ bestehen aber die Gleichungen:

$$(a\,d)^2 = R^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 + 2\,v_1\,v_2 \cos a$$

$$(b\,c)^2 = S^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 - 2\,v_1\,v_2 \cos a.$$

Die Resultante $R$ ist als **Kombinationsresultante**, die Resultante S als **Kompensationsresultante** zu bezeichnen.

Wenn man die Konstruktion der Linearkräfte $P$ und $Q$ an der entgegengesetzten Ecke $d$ des ursprünglichen Kräfteparallelogramms wiederholt, so erhält man das Parallelogramm der Kräfte $P$ und $Q$, dessen Kombinationsresultante mit der Kombinationsresultante $R$ des ursprünglichen Kräfteparallelogramms nach Grösse und Richtung zusammenfällt.

Wir bezeichnen die als duale Kräfte auftretenden Bewegungsgrössen

$$a i = P \text{ und } a k = Q$$

als Vektoren und deren Zusammensetzungswinkel mit $\varphi$.

Es gelten dann die Gleichungen:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos\varphi \qquad (1)$$

$$v_1{}^2 \cos^2 a = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos\varphi. \qquad (2)$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich für den Ausgleich der Vektoren, das ist für $\varphi = 90^\circ$ und $P = Q$

$$\frac{v^2}{2} \cos^2 a = 0.$$

Hieraus folgt, dass der Winkel $a$ in unendlich kleiner Differenz an der Grenze $90^\circ$ sich befindet und sowohl $90 + da$, als auch $90 - da$ betragen kann, weil für die Beobachtung der unendlich kleinen Messungsfehler mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv oder negativ zu nehmen ist, wie schon auf S. 117 angedeutet wurde.

Aus der ersten Gleichung folgt unter denselben Bedingungen und für $P = Q = U$

$$\frac{R^2}{4} = U^2,$$

woraus folgt, dass den ursprünglichen Bewegungsgrössen der Charakter von Vektoren zukommt.

Aus den vorher entwickelten Gleichungen folgt:

$$P^2 = R^2 \cos^2 a \text{ und } Q^2 = S^2 \sin^2 a,$$

und somit ist zu setzen:

$$R^2 = R^2 \cos^2 a + S^2 \sin^2 a + 2RS \sin a \cos a \cos\varphi,$$

woraus folgt:

$$R^2 - S^2 = 2RS \operatorname{cotang} a, \qquad (3)$$

womit wir die bereits auf S. 130 gewonnene Gleichung wiederum auf einem anderen Wege in allgemeiner Bedeutung erhalten.

Der Vektorenwinkel $\varrho$ wird bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos\varphi = \frac{R^2 - S^2}{2RS}\,\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\,v_1\,v_2 \sin\alpha}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4\,v_1^2\,v_2^2\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{v_1\,v_2\sin\alpha}{\sqrt{\left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}\right)^2 - v_1^2\,v_2^2\cos^2\alpha}}. \qquad (4)$$

Mit Bezug hierauf vergleiche man Formel (2) auf S. 128

Der Ausdruck im Zähler entspricht der Flächengrösse des Parallelogramms $abdc$ der ursprünglichen Bewegungsgrössen und repräsentiert demnach die innere Arbeitsgrösse des Systems, wogegen $\sqrt{v_1^2\,v_2\cos^2\alpha}$ $= v_1\,v_2\cos\alpha$ der als Gegenwirkung zu dieser Arbeits- oder Kraftgrösse auftretenden äusseren, das heisst der vom äusseren Kraftfelde ausgeübten Arbeitsgrösse entspricht und $\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}$ die Arbeitsgrösse des Gesamtsystems darstellt.

Hieraus folgt, dass durch $\cos\varphi$ der Wirkungsgrad des Systems zum Ausdruck kommt.

75. Betrachtet man die Kräfte im allgemeinen als duale Grössen, das heisst als Flächenkräfte oder Potentiale in der Form von $v^2$, so erhält man für den Wirkungsgrad des Systems den Ausdruck:

$$\cos^2\varphi = \frac{v_1^2\,v_2^2\sin^2\alpha}{\left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}\right)^2 - v_1^2\,v_2^2\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

Hieraus folgt unter der Annahme, dass die Werte von $v_1^2$ und $v_2^2$ sich der Gleichheit bis auf eine unendlich kleine Differenz nähern, dass der Wirkungsgrad $\cos^2\varphi$ doch noch merklich von dem Maximalwerte „Eins" verschieden ist. Ein einzelnes Kräftesystem, das als Teil des Universums zu betrachten ist, kann daher niemals den maximalen Wirkungsgrad Eins erreichen und hat für ein solches Einzelsystem das Prinzip der Erhaltung der Kraft nur eine bedingte Geltung, weil dasselbe im synchronen Wechselspiel der Schwingungen, das ist im dynamischen Gleichgewichtszustande mit dem Universum im steten Kraftaustausch steht. Nur für ein absolut isoliertes Kräftesystem, also nur für die adiabatische Zustandsänderung kann dem Prinzip der Erhaltung der Energie strenge Gültigkeit zuerkannt werden.

In Fig. 9 entspricht ferner die Flächengrösse des Parallelogramms $afie$ dem Ausdruck $v_1\,v_2\cos^2\alpha\sin\alpha$ und die Flächengrösse des Parallelogramms $agkh$ dem Ausdruck $v_1\,v_2\sin^3\alpha$. Für $\alpha = 45°$ und $v_1 = v_2 = v$ folgt daraus:

$$\text{Parallelogrammfläche } afie = \frac{v^2}{\sqrt{8}},$$

$$\text{Parallelogrammfläche } agkh = \frac{v^2}{\sqrt{8}},$$

so dass also unter dieser Bedingung beide Flächen gleich gross sind.

Ferner ergiebt sich für die Parallelogrammfläche $aidk$ der Ausdruck $P.Q \sin\varphi$ oder $RS \sin a \cos a \sin\varphi = \sqrt{(v_1{}^2 - v_2{}^2)^2 - 4 v_1{}^2 v_2{}^2 \cos 2a}$ $(\sin a \cos a)$. Hieraus folgt für $a = 45$, $\varphi = 180°$ und für $v_1 = v_2$

$$\text{Parallelogrammfläche } aidk = \frac{(v^2 - v^2)}{2} = 0;$$

demnach entspricht die Fläche der Ausgleichsarbeit der Vektoren.

Durch das Produkt der Flächen:

$$(afie)\ (agkh) \text{ ergiebt sich } \frac{v^4}{8} = \frac{(v^2)^2}{8}.$$

Dieser Ausdruck entspricht dem in der Elektrostatik aufgestellten Ausdruck für die Oberflächenspannung:

$$\frac{f^2}{8\pi k}.$$

Wenn man den neuerdings insbesondere von Heavyside als unrationell bezeichneten Faktor $\pi$ weglässt, $k = 1$ und $f^2 = v^4$ setzt, so entspricht $\frac{v^4}{8} = \frac{v^2}{\sqrt{8}} \cdot \frac{v^2}{\sqrt{8}}$ dem Produkt der durch die oben bezeichneten Parallelogrammflächen repräsentierten Intensitäten (Maxwells stress and strains) des inneren und äusseren Kraftfeldes des Systems*).

Für $\sin a = \cos\varphi$ folgt aus der Gleichung (4) die bereits auf S. 120 auf einem anderen Wege gewonnene Gleichung:

$$v_1{}^2 - v_2{}^2 = 2 v_1 v_2 \cos a,$$

welche in der Form den berühmten Maxwellschen Gleichungen (vergl. S. 87) entspricht. Die Bedeutung dieser Gleichung ist zum Teil schon im Paragraph 65 erörtert worden.

Zerlegt man die Differenz $v_1{}^2 - v_2{}^2$ in ihre Faktoren $(v_1 + v_2)$ $(v_1 - v_2)$ und setzt man $v_1 = v_2 = v$ und $a = 90°$, also $\cos a = 0$, so erhält man

$$\frac{2v^2}{v+v} = \frac{0}{0} = k = v,$$

und also

$$v^2 = kv,$$

oder für $v^2 = e$, $k = \varrho$ und $v = i$

$$e = \varrho i.$$

*) Man vergl. Paragraph 58, S. 105.

Es ist dies die Form der Gleichung, in welcher das sogenannte Ohmsche Gesetz zum Ausdruck kommt. Bezüglich der Deutung dieses Gesetzes ist auf Paragraph 43 zu verweisen.

In obiger Gleichung entspricht $e$ dem Potential oder der auf die Einheit des spezifischen Widerstandes $\varrho$ reduzierten motorischen, bezw. elektromotorischen Kraft. Führt man den Gesamtwiderstand $R$ des Stromkreises ein, wobei $R$ dem in spezifischen Einheiten (legalen Ohm in Quecksilbersäulenlänge von 1062 Millimeter) ausgedrückten Widerstande entspricht und setzt man $eR = E$, $\varrho = i = I$, so erhält man

$$E = I^2 R$$

als Ausdruck für das sogenannte Joulesche Gesetz.

Im allgemeinen entspricht für absolute Einheiten der Ausdruck

$$v^2 = v\,k \text{ oder } v = \frac{1}{k}\,v^2$$

der in der Elektrostatik geltenden Formel des sogenannten elektrostatischen Druckes oder der Oberflächenspannung; diese Kraftwirkung ist aber identisch mit dem Auftreten des kinetischen Druckes, welcher nach der von Gauss herrührenden Fassung dargestellt wird durch die bekannte Formel

$$f + f' = 4\pi\sigma$$

oder für $f = f'$

$$f = 2\pi\sigma.$$

Die Kräfte $f$ und $f'$ entsprechen der Wirkung und Gegenwirkung des äussern und innern Kraftfeldes des betrachteten Systems, während $\sigma$ die Oberflächenspannung oder Flächenladung, bezw. die Dichte der Ladung repräsentiert. Diese Dichte ist aber für $f = f'$ gleich $f^2 = v^2$ und ferner ist der irrationale, unberechtigte Faktor $2\pi = \frac{1}{k}$ zu setzen, so dass die Gleichung

$$f = 2\pi\sigma$$

mit der Gleichung

$$v = \frac{1}{k}\,v^2$$

identisch wird.

In der That entspricht der statische Zustand des konstanten elektrischen Stromes dem Zustande des elektrostatischen Druckes, welcher vom äussern Kraftfelde gegen die Oberfläche des als Kraftstrecke oder Kraftröhre zu betrachtenden Leitungsdrahtes wirksam ist und gegen welchen, wie man annimmt, die Wärmestrahlung des innern Kraftfeldes reagiert. Es könnte aber wohl auch angenommen werden, dass das äussere Kraftfeld die Ursache der Wärmeentwickelung ist, indem dasselbe mit der Molekulararbeit des innern Kraftfeldes, das heisst mit dem Leitungsmaterial in ein Wechselspiel tritt und durch Zustrahlung von dynamischem Äther den inneren Kraftaufwand ersetzt,

um den Gleichgewichtszustand des Systems zu erhalten. Selbstverständlich arbeiten auch die molekularen Querschichten oder Potentialflächen des innern Kraftfeldes, das heisst der Kraftstrecke des Leiters gegen einander, indem sie sich periodisch abwechselnd laden und entladen und also sich in einem schwingenden Zustande befinden. Sind diese Schwingungen in Betracht zu ziehen, wie dies bei Wechselströmen der Fall ist, so kommt die Formel

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = v_1 v_2 \cos \alpha$$

oder, wenn ausserdem noch die störende Wirkung einer Phasenverschiebung zu berücksichtigen ist, die Hauptformel

$$R^2 - S^2 = 2RS \operatorname{cotang} \alpha \cos \varphi$$

in Betracht.

Da mit Rücksicht auf den konstanten Strom die Stromstärke dem Querschnitte des Leitungsdrahtes direkt proportional ist, so entspricht der Ausdruck

$$E = I^2 R k$$

dem Volumen der Kraftstrecke, wobei der spezifische Widerstand $k$ im allgemeinen gleich Eins gesetzt wird. Hiernach ist die motorische Kraft $\varepsilon$ eine Volumenkraft und durch $L^3$ zu definieren, wenn Masse und Zeit als absolute Einheiten betrachtet werden, indem diese Grössen der räumlichen Kraftstrecke gegenüber überhaupt nur die Bedeutung von Zahlenfaktoren haben. Es ist hierbei immer daran zu denken, dass im Grunde genommen Masse und Zeit nur durch Raumstrecken bezw. Kraftstrecken gemessen werden.

Zieht man dies in Betracht und setzt man mit Bezug darauf in den üblichen Dimensionsformeln des elektrostatischen und elektromagnetischen Systems für die Symbole $M$ und $T$ der Masse und Zeit die Dimension der Raumstrecke $L$ ein, so erhält man für diese Grössen zum Teil die Dimension der einfachen Raum- oder Kraftstrecke $L$, zum Teil aber den Ausdruck der absoluten Einheit $L^0 = 1$; insbesondere wird der Widerstand als absolute Einheit gekennzeichnet. In der That ist der Widerstand das relativ statische Mass für die dynamische Kraftwirkung, denn eine Kraft muss gegen einen Widerstand ausgelöst, das heisst differenziert werden, wenn sie gemessen werden soll, wobei der Widerstand, wenn er nicht wiederum mit einer anderen Kraft in Vergleich gestellt worden ist, als absolute Einheit auftritt. Die Kräfte dagegen kommen gegenüber dem sogenannten Widerstande, der seiner Natur nach nichts anderes als eine Kraft ist, in positiver oder negativer Weise zur Geltung, das heisst, sie wirken dynamisch durch Selbstinduktion, indem sie, wenn positiv wirkend, den Widerstand scheinbar

zurückdrängen, weil dieser, als Kapazität, die Kraftdifferentialquotienten $d\frac{(v^2)}{2}\Big/dv$ so zu sagen verschluckt, so dass ein entsprechender Kraftnachschub nötig ist; oder die Kraft kommt gegenüber dem Widerstand in negativer Weise zur Geltung, indem sie als Kapazität den Widerstand zur Selbstinduktion herausfordert und dessen Kraftdifferentialquotienten in sich aufnimmt und akkumuliert, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Im allgemeinen treten also Kräfte dynamisch positiv durch Selbstinduktion gegen den Widerstand auf und werden dann durch den Koeffizienten der Induktion $L$ des dynamischen (bezw. elektromagnetischen Systems) definiert; oder die Kräfte machen sich im Verhältnis zum Widerstande negativ durch Kapazität geltend und werden dann durch die Kapazität $L$ des statischen Systems definiert.

76. In der Formel

$$v_1{}^2 - v_2{}^2 = \pm\, 2\, v_1\, v_2 \cos a$$

kommt das Dopplersche Gesetz und gewissermassen auch die Formel des seinerzeit von Wilhelm Weber aufgestellten sogenannten elektrodynamischen Grundgesetzes (vergl. S. 17) zum Ausdruck.

Die aus dem Newtonschen Gravitationsgesetze von Weber auf empirischem Wege kombinierte Formel lautet mit Weglassung des letzten, als Differentialquotient zweiter Ordnung auftretenden Gliedes $\left(\beta\frac{d^2 r}{d t^2}\right)$:

$$F = \frac{m\, m^1}{r^2}\left(1 \mp a\left[\frac{d\, r}{d\, t}\right]^2\right)$$

oder für $F = 1$ und $m = m^1$

$$r^2 - m^2 = \mp\, k\left(\frac{d\, r}{d\, t}\right)^2.$$

Berücksichtigt man, dass die im Grunde genommen durch eine Kraftstrecke gemessene, weil für die Masseneinheit durch $g$ (als Beschleunigung der Schwere) symbolisierte Masse gleich $v$ zu setzen ist und dass die als Einheit angenommene Kraftstrecke für das zweite Zeitintervall der Kraftwirkung in der gleichzeitigen Bedeutung des Kraftweges und der tendierenden Endgeschwindigkeit durch 2 dargestellt ist (vergl S. 32), so ist der Ausdruck $\frac{m^2}{r^2} = \frac{v^2}{4}$ in der Bedeutung der kleinsten lebendigen Kraft zu setzen. Es entspricht aber diese kleinste lebendige Kraft dem zwischen zwei in Wechselwirkung begriffenen Massen stattfindenden kinetischen Drucke.

Das von Doppler im Jahre 1842 aufgestellte, in den obigen Formeln zum Ausdruck kommende Prinzip wurde von demselben auf die Erscheinung begründet, dass ein Ton sich erhöht, wenn zwischen

Ohr und Tonquelle eine Annäherungsbewegung stattfindet, dagegen sich vertieft, wenn zwischen Ohr und Tonquelle eine Entfernungsbewegung vorhanden ist.

Dieses Prinzip kommt auch bei der spektroskopischen Bestimmung der in der Richtung der Gesichtslinie vorhandenen Geschwindigkeit von Sternen zur Anwendung, welche Bestimmungsmethode der Sternbewegungen bekanntlich von dem amerikanischen Astronomen Huggins zuerst benutzt worden sein soll. Es ist hierbei die Verschiebung der für den Stern charakteristischen Spektrallinien in Betracht zu ziehen. Diese Verschiebung findet nach dem roten Ende des Spektrums statt, wenn der Stern sich in der Richtung der Gesichtslinie vom Beobachter entfernt, dagegen wird die charakteristische Spektrallinie nach dem violetten Ende des Spektrums verschoben, wenn der Stern sich in der Richtung der Gesichtslinie dem Beobachter nähert.

Man kann die Art und Weise dieser Bewegung respektive Verschiebung des Lichtstrahles, die als Aberration zu bezeichnen ist, nach der Methode der Kräftezusammensetzung durch das Parallelogramm leicht graphisch darstellen.

In Fig. 10 ist angenommen, dass auf den Punkt $a$ zwei Kräfte einwirken; dieselben setzen sich in der Resultante $ab$ zusammen. Die relativ konstante Kraft $pa$ wirkt nach der Voraussetzung mit dem gleichbleibenden, durch die Kraftstrecke $pa$ dargestellten Impulse fort, wogegen die Kraft $qa$ durch einen einfachen Impuls, der in Form

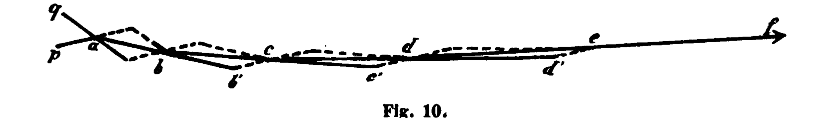



Fig. 10.

einer lebendigen Kraft als Störung im Kraftfelde auftritt, zur Wirkung kommt. Demzufolge setzt sich der konstante Impuls mit der nach $b'$ in der Strecke $bb' = ab$ verlängerten Resultante des vorhergegangenen Kräftespiels zu der neuen Resultante $bc$ zusammen und so fort. Es ist ersichtlich, dass die so zustandekommende Bahn des bewegt gedachten Kraftpunktes von einer mehr oder minder stark gekrümmten Kurve allmählich in eine mehr und mehr der geraden Richtung sich nähernde Bahn übergeht. Denkt man sich die Bewegung in umgekehrter Richtung vorsichgehend, so ist ersichtlich, dass eine Aberration des in der Bahn sich fortpflanzenden Kraftstrahles stattfindet.

Die auf verschiedenen Wegen von uns gewonnene Gleichung

$$R^2 - S^2 = 2\,RS \text{ cotang } \alpha \cos \varphi \qquad (1)$$

bringt ein allgemeines Naturgesetz zum Ausdruck, nämlich ein Gesetz, welches in der folgenden Weise zu formulieren ist:

Im dynamischen Zustande der inneren Kräfte eines Massen- oder Kräftesystems ist zur Erhaltung des Bestandes dieses Systems eine äussere Kraft nötig, welche dem statischen Wirkungsgrade des inneren Kräftezustandes oder der Ausgleichsarbeit des Systems umgekehrt proportional ist.

Der innere Kraftzustand oder innere Arbeitszustand eines Massen- oder Kräftesystems wird durch die Winkelfunktion cotang $\alpha$ charakterisiert, welche das momentane, im Zustande der variablen Aktion vorhandene Verhältnis der Schwingungsphasen der beiden Wirkungsfaktoren darstellt, von denen der eine direkt proportional zur Zeit ist, der andere sich umgekehrt proportional zur Zeit verhält, so dass der erste Faktor der mit der Zeit wachsenden Geschwindigkeit, der zweite Faktor dem mit der wachsenden Zeit abnehmenden Drucke der Beschleunigung entspricht. Demnach wird der erste Faktor durch $LT^{-1}$, der zweite Faktor durch $LT$ definiert. Der aus der spezifischen Natur des Vorganges zur Anschauung kommende Zeitverlauf entspricht in seinen aufeinanderfolgenden, den Vorgang selbst charakterisierenden Intervallen einer Winkelfunktion und zwar wird dieser Verlauf für die abnehmende Zeit durch den Sinus, für die zunehmende Zeit durch den Cosinus ausgedrückt, weil die Veränderung des Sinus sich nach dem Cosinusgesetze vollzieht, während die Veränderung des Cosinus sich nach dem Sinusgesetze regelt. Hieraus folgt, dass die Intensitäten oder Kraftstärken des Kräftespiels für $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ sich momentan ausgleichen, weil in diesem Moment Sinus und Cosinus in ihrem Wachstum gleichwertig sind. Für diesen Moment sind also deshalb auch die zu freier Entwickelung gelangenden Wirkungselemente der Faktoren des Kräftesystems einander gleich. Bezeichnet man diese durch Differentiation der lebendigen Kräfte nach der Formel

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{v\,d} = v$$

zum Ausdruck gelangenden Bewegungsgrössen (per Masseneinheit) mit $v_1$ und $v_2$, so ist für den gedachten Moment $v_1 = v_2 = v$ zu setzen. Es bestehen dann mit Bezug auf die Kombinationsresultante $R$ und die Kompensationsresultante $S$ die bekannten Gleichungen:

$$R^2 = v^2 + v^2 + v^2\sqrt{2}$$

$$S^2 = v^2 + v^2 - v^2\sqrt{2},$$

woraus durch Summierung folgt:

$$\frac{R^2 + S^2}{4} = v^2.$$

Es entsprechen hierbei die halben Diagonalen $\frac{R}{2}$ und $\frac{S}{2}$ den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse durch $v$ gemessen wird. Die Grössen $\frac{R^2}{4}$ und $\frac{S^2}{4}$ sind aber als die kleinsten lebendigen Kräfte des Systems zu betrachten, welche, nach Ausgleich strebend, im kinetischen Druck gegen einander wirksam sind. Ist der Ausgleich erreicht, so ist $\alpha = 90^\circ$ und daher $R = S$, woraus für $R = S = U$ folgt

$$\frac{U^2}{2} = v^2.$$

Die variable Aktion des Kräftespiels ist dann vollendet und die stationäre Aktion ist eingetreten.

77. Wenn zwei Kräfte oder Massen $v_1$ und $v_2$ in einem Kraftfelde, also etwa im Schwerkraftfelde rechtwinklig auf einander einwirken, so sind dieselben als auf Kraftpunkte reduziert zu denken, welche als Zentralkräfte wirksam sind. In Fig. 11 ist ein derartiges Kräfte- oder Massensystem dargestellt, welches der Voraussetzung gemäss nach dem Gravitationsgesetze im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der zwischen den beiden Kraftpunkten $a$ und $b$ befindlichen Kraftstrecke $s$ und direkt proportional dem Produkte der beiden Kräfte wirksam ist. In den Kraftpunkten $a$ und $b$ hat man sich die Kräfte $v_1$ beziehungsweise $v_2$ konzentriert zu denken, woraus hervorgeht, dass diese Punkte nicht als abstrakt mathematische ausdehnungslose Raumorte, sondern als dreidimensionale körperliche Grössen, das heisst als Volumenkräfte oder motorische Kräfte von der Ordnung $L^3$ zu denken sind, welche unter der Einwirkung eines Kraftfeldes existieren und sich mit demselben in Wechselwirkung befinden. Diese sogenannten Kraftpunkte $a$ und $b$ sind also von gleicher Grössenordnung wie das Kraftfeld selbst, welches als eine Kugel von verhältnismässig unendlich grossem Radius zu denken ist, wenn man sich diesen Radius mit dem relativ unendlich kleinen Radius

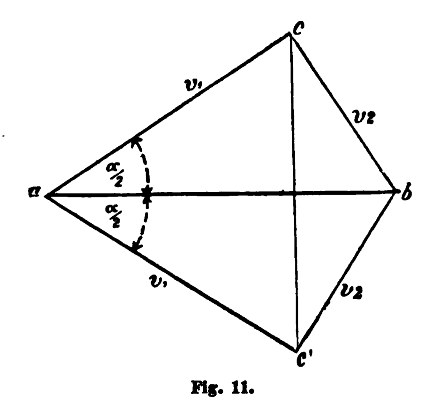


Fig. 11.

des Kraftpunktes gemessen denkt. Die äussere Fläche des Kraftfeldes, welche nach der Logik der Physik wiederum gegen ein Kraftfeld arbeiten muss, durch dessen Einwirkung es existiert, ist demnach gegen die innere mit der Oberfläche des Kraftpunktes direkt durch kinetischen Druck in Kontakt befindliche Kraftfläche verhältnismässig unendlich gross. Setzt man nun die Einheit der Kraftwirkung des äusseren Kraftfeldes als Ganzes in der Grössenordnung einer lebendigen Kraft:

$$\left[\frac{(\sqrt{v})^2}{2}\right]^3 = \left(\frac{v}{2}\right)^3,$$

so entspricht die Einheit dieser Wirkung gegen die Oberfläche des Kraftpunktes dem Differential:

$$d^2\left(\frac{v}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}\, v\,.(d\,v)^2,$$

wobei $(d\,v)^2$ als spezifische Flächeneinheit $(L^2)^0 = 1$ zu setzen ist. Es repräsentiert demnach $\frac{3}{4}v$ den Reaktionsimpuls per Flächeneinheit, mit welchem der Kraftpunkt gegen die Einwirkung des äusseren Kraftfeldes arbeitet, wobei natürlich (nach dem Prinzip der Äquivalenz von Wirkung und Gegenwirkung) das Kraftfeld im rein statischen Sinne mit demselben Impuls gegen die Einheit der Oberfläche des gedachten Kraftpunktes zu arbeiten hat. Nach der Logik der Physik muss aber die Einwirkung des äusseren Kraftfeldes gegen den Kraftpunkt um ein Kraftdifferential zweiter Ordnung grösser sein, weil der Kraftpunkt die durch seine Reaktion gegen die Kraft aufgewendete Flächenarbeit wieder zurück erhalten muss, wenn sein Bestand kontinuierlich erhalten bleiben soll. Hiernach ist in der vorhergehenden Formel noch dem Gliede rechts der Faktor $\frac{1}{k}$ beizufügen, wenn dieser Ausdruck der Reaktion des Kraftpunktes gegen das Kraftfeld entsprechen soll.

Hieraus ergiebt sich wiederum für die Wirkung $H$ des äusseren Kraftfeldes gegen einen an dessen Oberfläche in der Entfernung des relativ unendlich grossen Radius $R$ dieses kugelförmig gedachten Kraftfeldes anliegenden Punkt die Formel:

$$H = \frac{4\,k\,R\,\delta}{3},$$

wenn $\delta$ die Masse dieses Punktes im Verhältnis zur Masse des Kraftfeldes als Einheit bezeichnet. In allen diesen Formeln kommt der übliche irrationale Faktor $\pi$ nicht vor, weil eben nur Zentralkräfte mit einander in Beziehung gebracht werden und somit dieser Faktor beiden Seiten der Gleichung zukommt, so dass er eliminiert werden kann.

Die letzte Formel entspricht der bekannten, aus der Potentialtheorie der Kugelflächen den angenommenen Bedingungen entsprechenden Formel.

Mit Bezug auf Fig. 11 ist nun zu bemerken, dass die beiden Kraftpunkte *a* und *b*, welche gegenseitig durch die Kraftstrecke *s* auf einander einwirken, ihre gegenseitig freien Wirkungen in den normal gegen einander gerichteten Kraftstrahlen $v_1$ und $v_2$ entfalten, welche in einer, in dem Diagramm Fig. 1 als Normale zur Kraftstrecke $ab = s$ gerichteten Geraden *cc* sich darstellenden Kreisfläche gegen einander stossen und demnach, gemäss der Wirkung der Zentralkräfte $a = v_1^3$ und $b = v_2^3$, kugelförmige Kraftvolumina bilden, welche den inneren Arbeitsgrössen der beiden Systempunkte *a* und *b* entsprechen und nach Ausgleichung streben. Bei stattfindender Ausgleichung schliessen diese Kegel mit ihren Seiten einen rechten Winkel ein, so dass ihr, als vierseitige Pyramide zu denkender Körperinhalt einem Winkel des Kugelinhaltes entspricht. Es wird daher ein proportionaler Teil des Kraftinhaltes der beiden Kraftsphären durch innere Arbeit neutralisiert, so dass nur dreiviertel für die Reaktion gegen das äussere Kraftfeld übrig bleiben. Weil nun aber das äussere Kraftfeld auch die durch die innere Arbeit des Systems in Wärme umgewandelte Kraftgrösse zu ersetzen hat, indem diese als relativ statische Wirkung in der Form relativ gleichförmiger Bewegung oder Geschwindigkeit dem äusseren Kraftfelde wieder zuströmt, so ist von dem Kraftfelde, im Verhältnis zu den nunmehr als Einheit betrachteten Dreivierteln der freien Arbeit der gedachten Kraftpunkte, diesen letzteren der Betrag von Vierdritteln der von diesen letzteren gegen das äussere Kraftfeld ausgeübten Reaktionen zuzusenden*). Es ist dabei aber nicht zu vergessen, dass das im dynamischen Gleichgewicht befindliche System mit kinetischem Druck gegen einander arbeitet und daher die dynamische Wirkung für die Beobachtung verschwindet, so dass man den Druck als eine konstante Grösse betrachtet. Zieht man aber die aus den beiden Faktoren: Druck und Geschwindigkeit als Produkt sich zusammensetzende Arbeitsgrösse in Betracht und denkt man sich diese bei verschwindender Geschwindigkeit allmählich in Druck übergehend, so müsste für die Geschwindigkeit Null der Druck unendlich gross werden. Dies ist aber nach der Logik der Physik absurd und nur in der nach ihrer Art wiederum logischen Mathematik kann dieses Resultat als eine Konsequenz streng logischen Denkens zur Anerkennung gelangen. I n d e r P h y s i k m u s s d a s d y n a m i s c h e G r u n d p r i n z i p Geltung haben, welches von

---

*) Es ist immer daran zu denken, dass Ruhe und gleichförmige Bewegung relativ statische Zustände sind, insofern dabei keine messbare Kraftänderung stattfindet.

Werner Siemens als Sonderfall in der Form des sogenannten dynamoelektrischen Prinzips aufgestellt worden ist. Die Elektrizität bezw. der Elektromagnetismus, welcher als Dualität dem Kraftdifferential der Elektrizität zu Grunde liegt, hat vor den anderen Naturkräften in dieser Beziehung nichts voraus. Der Elektromagnetismus, der wiederum nur als ein Differential der höher stehenden gravimotorischen Kraft anzusehen ist, unterliegt mit den übrigen Naturkräften einem einheitlichen, einfachen Gesetztum, das seinen abstrakten Ausdruck in der aus dem Parallelogrammgesetz entwickelten Vektorengleichung:

$$R^2 - S^2 = 2\,R\,S \operatorname{cotang} \alpha \cos \varphi$$

findet.

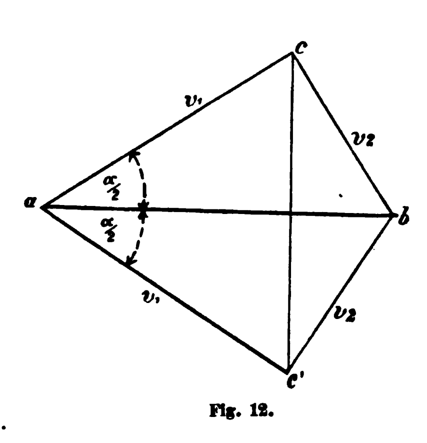


Fig. 12.

Aus der beistehenden Fig. 12, welche dem bereits besprochenen Diagramm Fig. 11 entspricht, ergiebt sich mit Bezug auf den von der Kathete $ac$ und der Hypotenuse $ab$ eingeschlossenen Winkel $\alpha$ die Gleichung:

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{v_1\, v_2}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Für den Zustand des dynamischen Gleichgewichtes folgt daraus ohne weiteres:

$$v_1^2 + v_2^2 = 2\, v_1\, v_2$$

oder, wenn $v_1 = v_2 = u^2$ ist

$$\frac{\sqrt{u^4 + u^4}}{u^2} = \sqrt{2}$$

setzen wir $2\,u^4 = w^2$, so folgt

$$\frac{w}{u} = \sqrt{2}.$$

Bekanntlich ist das Verhältnis der spezifischen Wärme $C_v$ bei konstantem Volumen zur spezifischen Wärme $C_p$ bei konstantem Druck, das ist:

$$\frac{C_p}{C_v} = \varkappa = 1{.}_{41}$$

bestimmt worden, wofür wir $\varkappa = \sqrt{2}$ setzen. Hieraus folgt, dass die Gravitation gleich dem Magnetismus (nach S. 121) als eine adiabatische Zustandsänderung zu gelten hat, wie auch aus den vorhergehenden Auseinandersetzungen zu folgern ist.

Indem zwei Massen gravimotorisch gegen einander wirken, wird deren Kraftäusserung gegen das äussere Kraftfeld, mit dem sie infolge der ihre Existenz bedingenden gravimotorischen Wirkung in kinetischer Beziehung stehen, geschwächt, wie aus den Erörterungen auf S. 152 hervorgeht. Hieraus folgt ohne weiteres, dass die äussere Kraft in einseitiger Weise gegen die Massen von aussen her wirksam wird und diese zum Ausgleich der Kraftwirkung gegen einander führt. Demnach ist die sogenannte Attraktion oder Anziehung der Massen auf die Wirkung des äusseren Kraftfeldes zurückzuführen, wie dies ja auch bezüglich der Elektrizität und des Magnetismus in ähnlicher Weise der Fall ist, indem auch hierbei der kinetische Druck zwischen der positiven Feldkraft (als Selbstinduktion) und der negativen Feldkraft oder Masse (als Kapazität) wirksam ist und die fraglichen Erscheinungen bedingt.

Aus der allgemeinen Formel des Wirkungsgrades eines Kräftesystems:

$$\cos^2 \varphi = \frac{4\, v_1{}^2\, v_2{}^2 \sin^2 \alpha}{(v_1{}^2 + v_2{}^2)^2 - 4\, v_1{}^2\, v_2{}^2 \cos^2 \alpha}$$

ergiebt sich nach S. 154 für $\alpha = 45^\circ$ und $\cos^2 \varphi = k$ die Formel:

$$\sqrt{2} = \frac{k \sqrt{v_1{}^4 + v_2{}^4}}{v_1\, v_2},$$

woraus für den hier angenommenen Fall des Kraftausgleiches, das ist für $\cos \varphi = 1$, also für den maximalen statischen und minimalen dynamischen Wirkungsgrad des Systems nach der oben eingeführten Bezeichnungsweise folgt

$$\sqrt{2} = \frac{w}{u},$$

wobei $w$ der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Drucke und $u$ der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen entspricht und somit der gravimotorische Kraftausgleich als eine adiabatische Zustandsänderung gekennzeichnet ist.

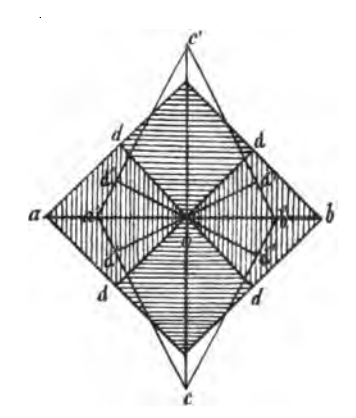


Fig. 13.

Wenn nun angenommen wird, dass die Ausgleichung der molekularen Kraftwirkungen eines Kräftesystems in dieser Weise zustandegekommen ist und nach ihrer Aufrechterhaltung durch die kinetische Wechselwirkung zwischen äusserem und innerem Kraftfelde strebt, so ergiebt sich nach Fig. 13 und den vorhergehenden Auseinandersetzungen, dass der Eintritt einer fremden Kraftwirkung, welche die

beiden mit dem äusseren Kraftfelde in den dynamischen Gleichgewichtszustand eingetretenen Kraftpunkte *a* und *b* zur Annäherung, das heisst zur Verkürzung ihrer sie trennenden Kraftstrecke zu zwingen sucht, eine Reaktion hervorrufen muss, welche rasch zu grosser Stärke anwächst und als eine von den gegeneinandergedrängten Massen selbst ausgehende, durch den scheinbar leeren Raum wirkende Repulsionskraft aufgefasst werden kann, wie man ja auch dies für gewöhnlich bezüglich der durch das äussere Kraftfeld, das heisst der durch den Ätherdruck hervorgerufenen Annäherung zweier gravitierender Massen der gegenseitigen, als Fernwirkung gedachten Attraktion zuschreibt.

In Fig. 13 ist angenommen, dass die beiden gleichstarken Kraftpunkte *a* und *b*, deren Kraftstrahlensphären sich durch das Gegeneinanderwirken der als ein Viertel des Kraftvolumens jeder Kraftsphäre zur Geltung kommenden Kraftstrahlenkegel oder Kraftstrahlenpyramiden *a c c* und *b c c* in das Gleichgewicht mit dem äusseren Kraftfelde gesetzt haben, durch Einwirken zweier äusseren Kräfte einander noch weiter genähert worden sind, so dass sie sich nunmehr an den Orten $a'$ und $b'$ befinden, wodurch die vorher in die Richtungen *a c* und *b c* fallenden Kraftstrahlen die Richtungen $a\,c'$ und $b\,c'$ angenommen haben, während die vom Mittelpunkte *o* des Systems auf die Richtungen jener Kraftstrahlen als Reaktionen wirkenden Normalen *o d* in die Richtung $o\,d'$ übergegangen sind.

Aus Fig. 13 wird ohne weiteres ersichtlich, dass die beiden im vorhergehenden Gleichgewichtszustande des Systems durch die mittels Vertikalschraffierung hervorgehobenen Quadratflächen *a d o d* ausgedrückten inneren Arbeitsgrössen des Systems, welche in diesem Gleichgewichtszustande den beiden äusseren, durch die horizontal schraffierten Quadratflächen *c d o d* dargestellten Arbeitsgrössen gleich sind, infolge der gedachten Zusammenschiebung der Kraftpunkte *a* und *b* nach den Orten $a'$ und $b'$ eine entsprechende Verkleinerung, die äusseren Arbeitsgrössen $c'd\,o\,d$ dagegen eine entsprechende Vergrösserung erfahren haben; durch diese Verstärkung der äusseren Kraftgrössen des Systems wird aber den das Zusammendrängen der Kraftpunkte verursachenden fremden Kräften entgegengewirkt, und diese molekulare Reaktion nimmt bekanntlich viel rascher zu, als dies der Fall sein würde, wenn der Vorgang sich nach dem Gravitationsgesetze regelte, wobei — wie oben nachgewiesen wurde — adiabatische Zustandsänderung stattfindet, und die infolge der inneren Arbeit der einen Hälfte des Systems erzeugte Wärme für die Arbeitsleistung der andern Hälfte des Systems wieder verbraucht wird. Wenn aber das im Gleichgewicht befindliche System in seiner wirksamen Kraftstrecke, wie dies in Fig. 13 dargestellt ist,

noch weiter verkürzt werden soll, so wird alle Wärme in das äussere Kraftfeld getrieben, welches dagegen reagiert, wie dies ja auch bei dem Vorgange des elektrischen Stromes geschieht. Wie vorher nachgewiesen worden ist, findet eine adiabatische Zustandsänderung statt, solange sich die bei dem Druck entwickelte Wärme, das heisst die von innen nach aussen strahlende Kraft, zu der im Kraftvolumen entwickelten Wärme, oder allgemeiner ausgedrückt, die von aussen nach innen strahlende Kraft wie die Quadratdiagonale zur Quadratseite verhält.

Der Gedanke, dass der Ätherdruck als Ursache der Gravitation anzunehmen sei, ist nicht neu. Schon Huyghens hat diesem Gedanken Ausdruck gegeben und seit Faraday ist derselbe von verschiedenen Physikern in verschiedenen Theorien ausgesprochen worden. Insbesondere hat sich Secchi in seinem Werke „Die Einheit der Naturkräfte“ damit beschäftigt, indem er die Schwere der durch Ätherstösse herbeigeführten Wirkung zuschreibt, wodurch die Anziehungs- und Abstossungserscheinungen herbeigeführt werden sollen. Die bezüglichen Erklärungen können jedoch nicht befriedigen. Als eifrigster Kämpfer für die sogenannte Ätherdrucktheorie ist Aurel Anderssohn in Breslau zu nennen, der nach dieser Richtung hin gewissermassen eine Schule gegründet hat*). Anderssohn hat versucht, alle Erscheinungen im Makro- und Mikrokosmos durch die Wirkung des Ätherdruckes zu erklären, wobei er viel Scharfsinn bewiesen hat, aber doch im Grunde genommen nicht über Meinungsäusserungen hinaus gekommen ist. Indessen muss man zugestehen, dass er einen klareren Einblick in die Naturvorgänge auf Grund von Experimenten, aber auch sozusagen instinktiv gewonnen hat als die schulmässigen Physiker. Die Kinetik der Druckwirkung ist ihm jedoch fremd geblieben, denn er hält an dem unklaren Begriffe der statischen Druckwirkung fest. Immerhin sind aber nicht nur seine Bestrebungen, sondern auch die Schlussfolgerungen und Erklärungen, zu denen er gelangt ist, sehr beachtenswert, und in der einheitlichen Auffassung der Naturvorgänge steht er auf dem modernen Standpunkt der Naturwissenschaft.

78. In der Gleichung:

$$R^2 - S^2 = 2RS \text{ cotang } \alpha \cos \varphi$$

ist daher eine allgemeine, und zwar die denkbar allgemeinste dynamische Kräfteformel aufgestellt, welche für $\alpha = 90^\circ$ in die allgemeine statische Kräfteformel übergeht. Es ist dann $R = S = U$ zu setzen und die

*) „Die Anderssohnsche Drucktheorie und ihre Bedeutung für die einheitliche Erklärung der physischen Erscheinungen“, von Prof. Dr. Gustav Hoffmann, Halle 1892, und Aurel Anderssohn, „Physikalische Prinzipien der Naturlehre“, Halle 1894.

Differenz $R^2 - S^2$ in das Produkt $(R + S)\ (R - S)$ zu zerlegen. Da nun unter der gestellten Bedingung

$$R - S = 0 \quad \text{und} \quad \cos a = 0$$

ist, so erhält man, indem man den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0} = k$ setzt,

$$k\,U = U^2 \cos \varphi; \qquad (2)$$

da aber ferner für den absoluten Gleichgewichtszustand des Systems auch die Differentialquotienten $v_1$ und $v_2$ der wirksamen lebendigen Kräfte $\frac{v_1^2}{2}$ und $\frac{v_2^2}{2}$ einander gleich sind, so ist nach Gleichung (4) auf Seite 144 $\cos \varphi = 1$ zu setzen und man erhält für $U^2 = E$, $U = I$ und $k = R$ die bekannte Formel des Ohmschen Gesetzes

$$E = R\,I,$$

so dass also dieses sogenannte Ohmsche Gesetz nur als ein Spezialfall eines allgemeinen Kraftgesetzes betrachtet werden muss, und zwar als der Spezialfall der absoluten Statik des Systems. Auch von Vaschy*) ist darauf hingewiesen worden, dass der elektrische Gleichstrom als ein statischer Kraftzustand zu betrachten ist. Mit Bezug hierauf würde man aber die in der Formel dieses Gesetzes vorkommenden Grössen nach dem elektrostatischen System zu definieren haben, wonach man erhält:

elektromotorische Kraft $E = L^{\frac{1}{2}}\, M^{\frac{1}{2}}\, T^{-1}$,
Stromstärke . . . . . . $I = L^{\frac{3}{2}}\, M^{\frac{1}{2}}\, T^{-2}$,
Widerstand . . . . . . $R = L^{-1}\, T$,

woraus folgt

$$L^{\frac{1}{2}}\, M^{\frac{1}{2}}\, T^{-1} = (L^{\frac{3}{2}}\, M^{\frac{1}{2}}\, T^{-2})\ (L^{-1}\, T).$$

Der Widerstand erscheint dann als die in der Zeit sich summierende, auf der Kraftflächeneinheit $\frac{1}{L^2}$ sich parallel schaltende Linearkraft $L$, welche durch Differentiation der Volumenkraft $(L^3)^{\frac{1}{2}}$ geliefert wird. Hierbei sind Masse und Zeit als blosse dimensionslose Zahlenfaktoren der Raumkraft betrachtet; in der That werden Masse und Zeit durch Raumstrecken gemessen. Setzt man in den obigen Dimensionsformeln für die Symbole der Masse und der Zeit das Symbol $L$ der Raum- oder Kraftstrecke ein, so reduzieren sich die Dimensionsformeln der bezüglichen drei Grössen auf die absolute Streckeneinheit $L^0 = 1$. Lässt man aber Masse und Zeit nur als dimensionslose Zahlenfaktoren der Kraftgrösse gelten, deren Symbole in den Dimensionsformeln keine Berechtigung haben, so erhält man nach der letzten Formel:

$$(L)^{\frac{1}{2}} = (L^2)^{\frac{1}{2}}\, L^{-1}$$

*) Comptes rendus, 1894.

und durch die Erhebung auf die zweite Potenz:

$$L = L^3 \, . \, L^{-2}.$$

79. Die allgemeine dynamische Kräfteformel

$$R^2 - S^2 = 2RS \text{ cotang } \alpha \cos \varphi,$$

welche auf ganz allgemeine Weise, ohne jede andere Voraussetzung, aus dem als Axiom geltenden Parallelogrammgesetz, durch die Zusammensetzung zweier elementarer Linearkräfte $v_1$ und $v_2$ unter dem Winkel $\alpha$ gewonnen worden ist, lässt sich auch aus der bekannten trigonometrischen Formel

$$\text{tang } \alpha = \frac{2 \text{ tang } \frac{\alpha}{2}}{1 - \text{tang}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

ableiten und ist als die für alle statischen und dynamischen Kräfteverhältnisse gültige Grundformel zu betrachten. Durch dieselbe wird also die Aufgabe der Aufstellung einer allgemeinen Grundformel der Mechanik gelöst, welche schon d'Alembert durch die Aufstellung des nach ihm benannten Prinzips und Lagrange durch die empirisch formulierte Gleichung

$$Pdp + Qdq + \ldots = 0$$

zu lösen suchten.

Schon oben wurde darauf hingewiesen, dass diese Gleichung in ihrer Form mit der Form der berühmten Maxwellschen Gleichungen übereinstimmt.

Berücksichtigen wir nochmals die Formel:

$$\cos \varphi = \frac{2 v_1 v_2 \sin \alpha}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4 v_1^2 v_2^2 \cos^2 \alpha}}$$

und setzen wir darin $\cos \varphi = k$ und $\alpha = 45^\circ$, so ergiebt sich

$$\sqrt{2} = \frac{k \sqrt{v_1^4 + v_2^4}}{v_1 v_2}.$$

Bekanntlich ist für das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck $(C_p)$ zur spezifischen Wärme bei konstantem Volumen $(C_v)$, das ist für $\frac{C_p}{C_v}$ der mittlere numerische Wert experimentell zu $0{,}41$ bestimmt worden, wofür man $\sqrt{2}$ setzen kann. Hiernach gewinnt das linksseitige Glied der letzten Gleichung die Bedeutung dieses Verhältnisses der spezifischen Wärmen, wobei der Zähler einer Hintereinanderschaltung der Kraftelemente auf Potenzierung

durch Arbeitsleistung, der Nenner einer Parallelschaltung der Kraftelemente in einer Äquipotentialfläche auf kinetischen Druck oder Oberflächenspannung entspricht.

Für $a = 0$ ergiebt sich nach der Formel für $\cos \varphi$ (S. 159) entweder

$$\cos \varphi = 0 \text{ oder } v_1 - v_2 = 0.$$

Nun ist aber für $v_1 = v_2$ die Funktion $\cos \varphi = 1$; ferner ist für $a = 0$ und $v_1 = v_2$ die Kompensationsresultante $S = 0$ und die Kombinationsresultante $R = 2v$, also für $v = 1$ ist $R = 2$. Die Hauptgleichung charakterisiert dann einen absolut statischen Zustand, der physikalisch unmöglich ist. Hieraus folgt, dass das Gesetz der Erhaltung der Kraft nur für ein absolut isoliertes System Anwendung finden kann und also nur relative Gültigkeit hat, wie schon auf S. 144 angedeutet wurde.

Endlich kann man annehmen, dass in der Hauptgleichung:

$$R^2 - S^2 = 2\, RS \operatorname{cotang} a \cos \varphi$$

der Winkel $a$ sich der Grenze $180°$ und der Winkel $\varphi$ sich der Grenze $90°$ unendlich nähert, wobei für eine kleine Änderung nach diesen Grenzwerten hin die Kräfte konstant bleiben. Es ist daher diese Gleichung nach den Winkelfunktionen zu differenzieren, wodurch man erhält:

$$(R^2 - S^2)\, d \operatorname{tang} a = 2\, RSd \cos \varphi,$$

oder

$$(R^2 - S^2) \frac{d\,a}{\cos^2 a} = -2\, R\, S \sin \varphi\, d\varphi,$$

oder

$$\frac{R^2 - S^2}{2} = -RS \cos^2 a \sin \varphi \frac{d\,\varphi}{d\,a}.$$

An der Grenze $90°$ wird aber $\sin \varphi = 1$ und $d\varphi = k$ konstant. Ferner kann man $\cos^2 a$ durch ein Flächenverhältnis $\frac{F}{F_1}$ ausdrücken. Hierbei ist aber noch zu bedenken, dass an der Grenze $a \sim 180°$ die Kompensationsresultante $S$ unendlich klein wird und daher durch $dS$ auszudrücken ist, wogegen $(d\,S)^2$ verschwindet. Unter diesen Voraussetzungen folgt:

$$\frac{R}{2} F^1 = Q = -k \frac{dS}{d\,a} F.$$

Dies ist aber die Form der von Clapeyron für Wärmestrahlung aufgestellten und später auch für Lichtstrahlung und elektrische

Strahlung benutzten, also überhaupt für alle Strahlungsvorgänge geltenden Gleichung.

80. Der sogenannte Widerstand wird daher durch den reziproken Wert einer Flächenkraft definiert. Bekanntlich wird die Dimensionsformel des spezifischen Widerstandes hergeleitet aus den Beziehungen des sogenannten Ohmschen Widerstandes zur Länge $l$ und dem Querschnitt $q$ des Leiters. Bezeichnet man den spezifischen Widerstand mit $\varrho$, so erhält man die Formel:

$$R = \frac{l}{q}\,\varrho = \frac{L}{L^2}\,.\,L^2 T^{-1},$$

wobei man durch einen Zirkelschluss aus der Definition des Widerstandes $R$ als einer Geschwindigkeit $L T^{-1}$ den spezifischen Widerstand durch $L^2 T^{-1}$ definiert, obschon dieser sogenannte spezifische Widerstand ebenso wenig wie die spezifische Wärme oder das spezifische Gewicht von der Zeit abhängig ist, sondern nur ein numerischer Vergleichswert sein kann, dem eine willkürlich eingeführte Einheit zu Grunde liegt. Unzweifelhaft ist der sogenannte Ohmsche Widerstand durch die Kapazität des Leitermaterials für Aufnahme der als Elektrizität bezeichneten Kraftäusserung bedingt; diese Kraftäusserung kann aber nur in einer besonderen Bewegungsform ihre Ursache haben, denn die Kraft beruht in Bewegung; Gewicht kann nur durch kinetischen Druck erzeugt werden, denn Druck ist Tendenz zur Geschwindigkeitsentwickelung; im scheinbaren Ruhezustande eines Körpers muss aber diese Geschwindigkeitsentwickelung im Unendlichkleinen, das heisst in der Verfolgung einer unmessbar kleinen Kraftstrecke ihre Grenze finden. Da nun aber mit Nullierung der Tendenz zur Geschwindigkeitsentwickelung auch der Druck nulliert werden würde, so folgt daraus, dass die Tendenz zur Geschwindigkeitsentwickelung eine pulsierende sein muss. Daher kann die Schwerkraft nur durch Schwingungen oder Wellenbewegung des Äthers, ähnlich wie das Licht, zur Entfaltung gelangen. Ebenso muss aber auch der sogenannte Ohmsche Widerstand, der ähnlich wie das Gewicht als Druck, nämlich als Gegendruck der Stromwirkung auftritt, in einer schwingenden Bewegung der beeinflussten Kraftpunkte der betreffenden Substanz, des Leitermaterials und des Äthers, seinen Grund haben. Hieraus folgt aber wiederum, mit Rücksicht auf das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, dass auch der sogenannte elektrische Strom nur als kinetischer Druck zu betrachten ist, und dass also Strom und Widerstand Grössen gleicher Ordnung sind, die sich im Maximum und Minimum ihrer schwingenden Bewegung nach dem auf S. 115 besprochenen Pendelgesetz mit einander aus-

gleichen. Es gilt alsdann aber für das Ohmsche Gesetz mit Bezug auf diese momentane Ausgleichung zwischen Strom $I$ und Widerstand $R$ die Formel

$$E = I^2 = R^2 = \varrho^2, \qquad (1)$$

wobei $R$ aber nur auf den molekularen Leiterquerschnitt, das heisst auf das sogenannte Kraftblättchen, dessen Begriff bereits in der Elektrostatik eingeführt ist, bezogen werden kann. Für die Messung wird diese Einheit der Leiterlänge, die physikalisch nur in molekularer Dicke zu denken ist, durch die 1.062 Meter lange 1 Quadratmillimeter im Querschnitt haltende Quecksilbersäule des legalen Ohms repräsentiert. Das legale Ohm entspricht daher auch bezüglich seiner Kapazität für die Aufnahme eines 1 Ampère starken Elektrizitätsstromes der Einheit der elektromotorischen Kraft; diese Einheit der elektromotorischen Kraft ist aber das Potential von 1 Volt. Hiermit ist der logische Unterschied zwischen elektromotorischer Kraft und Potential gekennzeichnet. Bezeichnet man das Potential durch $V$, so gilt nach der obigen Formel zur Kennzeichnung des konstanten Elektrizitätsstromes die Gleichung

$$V = I^2 = \varrho^2, \qquad (2)$$

wobei $\varrho$ den spezifischen Widerstand im erklärten Sinne bezeichnet. Setzt man nun die zu betrachtende, in Längen des legalen Ohms gemessene Leiterlänge gleich $l$, so ist $\varrho l$ der technische Widerstand, den man mit $R$ bezeichnen kann. Aus obiger Erklärung folgt, dass dieser Widerstand (analog zur Gewichtsformel $Mg$) einer gewissen Geschwindigkeit proportional ist; dasselbe gilt aber auch für den Strom. Die Formel (2) entspricht aber nicht nur dem Ohmschen Gesetz, sondern zugleich auch dem Jouleschen Gesetz, denn das Potential $V$ entspricht einer gewissen Wärmemenge und demzufolge auch einer gewissen Arbeitsgrösse, die etwa mit einem Kolbenschube einer Dampfmaschine zu vergleichen ist. Nach diesen Auseinandersetzungen gilt für die technische Formel des Ohmschen Gesetzes die Gleichung:

$$E = I \, . \, \varrho l = IR.$$

Setzt man nun $\varrho$ als spezifischen Widerstand des reinen Kupfers gleich Eins und reduziert man den spezifischen nach der Einheit des legalen Ohms in Ampère $A$ bei 1 Volt Potentialdifferenz oder Spannung gemessenen Widerstand irgend eines anderen Materials auf den spezifischen Widerstand des Kupfers, so ist $\frac{1}{A} = k$, wobei die Einheit im Zähler der Krafteinheit des Volt entspricht und der Nenner nur den Charakter eines numerischen Wertes hat. Hieraus folgt, dass die

Einheit des spezifischen Widerstandes einer Kraft entspricht, welche von gleicher Grössenordnung wie das Potential $V$ ist und daher den Charakter einer Flächenkraft hat, so dass sie durch eine Kraftfläche von der Dicke $dV$ repräsentiert wird. Es ist somit bewiesen, dass die Einheit des spezifischen Widerstandes durch das Symbol $L^2$ zur Darstellung kommt.

Für die Messung muss natürlich die statische, das heisst die latente, ruhende Kraft, die zeitlose Kraftgrösse, zur zeitlichen Kraft, das ist zur Kraftstärke oder Intensität ausgelöst werden, wobei eben die Zeit der Kraftauslösung oder der Kraftdifferentiation in Betracht zu ziehen ist; deshalb wird auch mit Rücksicht auf die Technik, die sich auf Messungen zu stützen hat, der spezifische Widerstand auf die Zeit bezogen. Die Logik der Physik, der es auf die Feststellung von Prinzipien ankommt, hat nur darauf Rücksicht zu nehmen, dass eine genaue Systematisierung stattfindet und die Logik nicht unter den Schlitten kommt.

Indem nun das Potential, als Ladung eines Kraftblättchens von unendlich geringer Dicke (das heisst: von der Dicke der molekularen Einheit), als eine relativ momentan wirkende Kraft auftritt, deren Wirkung sich auf die spezifische Zeiteinheit des Vorganges bezieht, wird dieses Potential, das heisst die Einheit der Volumenkraft oder motorischen Kraft, als relativ zeitlos betrachtet, wie man ja auch, und zwar nur in demselben Sinne, annehmen kann, dass die Schwerkraft zeitlos wirksam ist. Es entspricht also der sogenannte spezifische Widerstand der Elektrizitätsleiter der als Geschwindigkeit gemessenen sogenannten Beschleunigung $g$ der Schwerkraft und deshalb hat man auch diesen Widerstand als Geschwindigkeit definiert. Indem man der Schwerkraft eine unendlich grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit beilegt, meint man, dass die zeitliche Wirkung derselben auf ein Massenelement von der ursprünglichen Geschwindigkeit dieses Elements unabhängig sei. Es ist aber dabei zu bedenken, dass die beschleunigende Kraft der Schwere sich in der Zeiteinheit auf eine desto grössere Kraftstrecke verteilen muss, je grösser die ursprüngliche Geschwindigkeit der auf die Geschwindigkeitsentfaltung der Schwerkraft hinwirkenden Störung ist. Ausserdem ist aber auch die von der Schwerkraft in unendlicher Zeit zu erreichende Geschwindigkeit (nach S. 124) auf etwa 11000 m pro Sekunde beschränkt. Es wird also bei der Schwerkraft, ebenso wie bei allen anderen Zentralkräften die Kraftentfaltung in ihrer Intensität umgekehrt proportional zur durchlaufenen Kraftstrecke stattfinden und auf ihrem unendlichen Wege durch die Unendlichkeit der Zeit kompensiert werden.

W. Wundt bemerkt darüber*), nachdem er darauf hingewiesen hat, dass die Naturkräfte zu ihrer Fortpflanzung durch den Raum, infolge der Kompensation zwischen Kraftstrecke und Kraftfortpflanzung, Zeit brauchen: „Dagegen giebt es eine Naturkraft, für welche diese Kompensation nicht zutrifft, weil sie nach der gegenwärtig giltigen Annahme keine Zeit zu ihrer Fortpflanzung nötig hat". Um hierüber zur Klarheit zu gelangen, braucht man nur an die mittels der sogenannten Poggendorff'schen Schwerkraftswage nachzuweisende Thatsache zu denken, dass der Druck der Schwere abnimmt, wenn eine Masse mit einer Beschleunigung abwärts bewegt wird. Die Schwerkraft oder Gravitation hat sich dabei in der Zeiteinheit auf eine längere Kraftstrecke zu verteilen, so dass auf die Einheit der Kraftstrecke ein um so kleinerer Betrag der Intensität kommt, je rascher sich die Bewegung in der Fallrichtung vergrössert. Man muss hierbei auch noch daran denken, dass gleichförmige Bewegung in einem homogenen Kraftfelde mit der Ruhe bezüglich der Reaktion des Kraftfeldes identisch ist. Die Schwere unterliegt also dem Dopplerschen Gesetze in gleicher Weise wie Wärme, Licht, Elektrizität, Magnetismus, kurz: wie alle Strahlungsvorgänge. Bezüglich des Dopplerschen Gesetzes ist auf S. 148 zu verweisen.

81. Es steht wohl ausser Zweifel, dass der terrestrische Magnetismus und die Schwerkraft unseres Erdballs in einem gewissen, wenn auch noch keineswegs entschleierten Zusammenhange stehen. Die Elektrizität mag wohl das Arbeitsprodukt beider Kräfte sein, wie die Nordlichter und andere Erscheinungen dies zu verraten scheinen. Merkwürdig ist auch das periodische Schwanken des Erdmagnetismus, wobei aus der vierundzwanzigstündigen Periodizität der Deklination der Magnetnadel sich ein Kausalverhältnis zwischen der Achsialumdrehung des Erdballs und dessen magnetischem Kraftfelde herausstellt, auf welches wir später zurückkommen.

Für die Elektrotechnik sind die Gesetze des Magnetismus von grösster Wichtigkeit, insofern der Magnetismus als eine Hauptquelle der Elektrizitätsentwickelung zu betrachten ist. Vom Standpunkte der modernen Naturwissenschaft ist anzunehmen, dass diese Quelle der magnetomotorischen Kraft aus dem gravimotorischen Kraftfelde des Erdballs entspringt, denn wie schon Faraday geahnt, wie Maxwell analytisch-mathematisch bewiesen und wie endlich Hertz experimentell gezeigt hat, steht der elektrische Stromleiter mit dem räumlichen Kraftfelde in einem innigen Rapport, indem er Wärmestrahlen in dieses

---

*) Logik, 2. Band: Methodenlehre, 1. Aufl. S. 370.

Kraftfeld hinaussendet und dafür eine Kraftbethätigung einheimst, die wir als Elektrizität, speziell als elektrischen Strom bezeichnen, sobald der Elektrizitätsleiter mit der Elektrizitätsquelle der Raumkraft eine kontinuierliche Unterlage darbietet, das heisst: einen Stromkreis bildet. Die Art und Weise dieser Wirkung lässt sich wohl durch einen Mechanismus veranschaulichen, wobei jedoch — wie selbstverständlich ist — von einigen Inkongruenzen abgesehen werden muss, denn alle Vergleiche hinken.

Man denke sich eine doppelt wirkende Luftdruckpumpe, die auf irgend eine Weise gleichmässig möglichst rasch betrieben wird, so dass die Kolbenstösse einer schnell wechselnden Wellenbewegung entsprechen. Ein- und Austrittsöffnung dieser Pumpe sind durch ein ringförmig gebogenes Rohr vereinigt, so dass der Pumpencylinder nur durch dieses Rohr einen Verbindungskanal seiner beiden Enden besitzt und mit dem äusseren Raume nur durch dieses Rohr in einen gewissen Zusammenhang treten kann. Dieser Zusammenhang wird aber in der folgenden Weise gedacht. Das Rohr ist in gleichförmiger Verteilung siebartig mit kleinen Löchern versehen und diese Löcher sind abwechselnd mit nach innen und nach aussen sich öffnenden Ventilen ausgerüstet, welche unter verschwindend kleiner Druckdifferenz zwischen dem Raume im Rohre und dem äusseren Raume in exaktes Spiel treten können, wobei die eine Hälfte der Ventilzahl sich nach aussen öffnet, während die andere Hälfte der Ventilzahl sich gegen aussen absperrt und umgekehrt. Hieraus folgt, dass abwechselnd für jeden Kolbenschub der Pumpe die eine Hälfte der bezüglich ihrer Wirkungsweise gleichmässig verteilten Ventile nach innen, die andere Hälfte nach aussen offen ist, wobei kleine Druckdifferenzen zwischen den beiden Cylinderenden der Pumpe stattfinden werden, weil die Kraft durch die Luftmasse des Rohres sich fortpflanzen muss und dazu etwas Zeit braucht. Ob dieser Mechanismus in Wirklichkeit ausführbar oder nicht ausführbar ist — letzteres ist natürlich der Fall — kommt hierbei nicht weiter in Frage, denn der Vorgang ist ein rein ideeller. Wir nehmen also an, dass bei jedem Kolbenschube durch die eine Hälfte der Ventilzahl ebenso viel Luft aus dem durch den Luftstromkreis gebildeten physikalischen System nach aussen entweicht, als durch die andere Hälfte der Ventilzahl in das System eintritt. Ein ganz ähnlicher Vorgang findet bezüglich des elektrischen Stromkreises statt, wobei die Mitwirkung des äusseren Kraftfeldes, das ist die Mitwirkung des Äthers, auf die bekannte Weise mittels eines Eisenstaubbildes sichtbar gemacht werden kann. Es geschieht dies dadurch, dass man einen stromführenden Draht durch ein horizontal gehaltenes Kartenblatt steckt und feine Eisenfeilspäne

um den Draht herumstreut. Durch leichtes Klopfen gegen das Kartenblatt ordnen sich diese Eisenteilchen ringförmig um den Draht, wobei sich die Ringe gegen den Draht hin verdichten. Das Ganze deutet eine Art von Kraftwirkung an, wie man dieselbe etwa bei einem Wirbelsturme annehmen kann. Der infolge der elektrischen Erregung des Drahtes in seinem Gleichgewichtszustande gestörte Äther verhält sich hierbei im Kleinen ähnlich, wie er sich bei dem in der Kant-Laplaceschen Hypothese vorausgesetzten Ballungsakte unseres Sonnensystems im Grossen verhalten haben mag. Diese Art der Wirkung des räumlichen Kraftfeldes wird bekanntlich auch bezüglich der Bildung der Lichtnebel angenommen, welche aus den Tiefen des Weltraumes heraus leuchten und von den Astronomen eifrigst, insbesondere auch bezüglich ihrer physikalischen Natur und chemischen Zusammensetzung spektralanalytisch, untersucht worden sind. Indem das Metall eines elektrisierten Leitungsdrahtes in seiner Aggregationskraft durch Entziehung inneren Äthers geschwächt wird, kommt dessen Molekularkraft ins Übergewicht, so dass das Metall nach Desaggregation, nach molekularer Auflösung strebt; durch den äussern Ätherdruck wird es erhitzt, glühend, schmilzt und löst sich schliesslich in Dampf auf. Der äussere Äther, der das Gleichgewicht zwischen sich und der von ihm einst zusammengeballten Materie erstrebt, wendet seine Kraft auf, indem er sich zu Potentialflächen um den Leitungsdraht herum verdichtet und denselben zusammenhält, so lange es eben nach dem Kraftverhältnis geht. Der elektrische Strom ist daher ein relativ statischer Zustand, der sich in unendlich kleinen und unendlich raschen Ätherschwingungen vollzieht, wobei sich die molekularen Querschnitte des Leiters abwechselnd gegenseitig laden und entladen.

82. Von grossem Interesse ist, was Oliver Heavyside in seiner elektromagnetischen Theorie*) über die gebräuchlichen Formeln in drastischer Weise expliziert. Seine Darlegungen lauten in möglichst getreuer Übersetzung wie folgt:

Es mag wohl bemerkt werden, dass die von mir benutzten Gleichungen (mit Bezug auf den vorhergegangenen Teil der Entwickelungen) sich von den in allen mathematischen Abhandlungen dieses Gegenstandes in gewisser Beziehung unter anderem auch insofern unterscheiden, als die Konstante $4\pi$, welche gewöhnlich so unheimlich sich hervordrängt, durch ihre Abwesenheit glänzt. Diese Konstante $4\pi$ wurde früher als ein wesentlicher Teil aller elektrischen und magnetischen Theorien betrachtet. Eines der ersten Resultate,

*) The Electrician, 16. Oktober 1891, p. 655.

auf welche ein Student der mathematischen Lehre von der Elektrizität in den vor-Maxwellschen Tagen hingewiesen wurde, war das Coulombsche Gesetz der Beziehung zwischen der Dichte der elektrischen Schicht auf einem Leiter und der Intensität der elektrischen Kraft just ausserhalb desselben, nämlich

$$\varepsilon = 4\pi\sigma. \qquad (1)$$

Da diese Beziehung mathematisch bewiesen wurde, so schien es, als wenn $4\pi$ ein wesentliches Verhältnis zwischen zwei physikalischen Grössen wäre, nämlich zwischen der Elektrizität und der Kraft, welche diese auf eine andere Elektrizität ausübt. Es wurde niemals ein Wink darüber gegeben, dass $4\pi$ rein konventionell sei; in der That wurde dieser Faktor auch nicht als konventionell angesehen und in manchen Kreisen geschieht dies auch heutzutage noch nicht. Nachher, im Anfang der wissenschaftlichen Behandlung des Magnetismus, wurde durch das berühmte Gausssche Theorem mathematisch bewiesen, dass der gesamte Fluss der magnetischen Kraft durch eine geschlossene Fläche nach ausserhalb genau gleich $4\pi$ mal der Gesamtmenge des innerhalb dieser Oberfläche eingeschlossenen Magnetismus sei; im Gegenteil aber könnte man wohl annehmen, dass dieses merkwürdige Resultat als eine notwendige Folgerung aus den Eigenschaften der Potentialfunktion und ihrer Ableitungen und der drei kosinalen Richtungen der Normalen auf ein Oberflächenelement betrachtet werden müsse. Es war komisch, sehr komisch. Wie dem aber auch sein mag, das $4\pi$ wusste seinen Weg zu finden, um in diesen und ähnlichen Resultaten Verwirrung anzurichten, wie z. B. in der wohlbekannten Formel

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa, \qquad (2)$$

wo $\mu$ als die Permeabilität und $k$ als eine andere physikalische Eigenschaft auftritt, welche als die Suszeptibilität der Magnetisation einer Substanz bezeichnet wird. Das dunkle Mysterium wurde durch die Mathematik sorgfältig verschleiert. Es war ebenso schwierig, ein Verständnis dafür zu gewinnen, wie es jener Hausvater gewinnen konnte, der den Apfel im Mehlkloss entdeckte und nicht begreifen konnte, wie seine Frau denselben hineinpraktiziert habe. Die Sache wurde auch durch Maxwells grosses Werk nicht klarer gemacht; Maxwell war der Meinung, seine Theorie der elektrischen Verschiebungen erkläre die Bedeutung des $4\pi$ (in dem entsprechenden elektrischen Theorem), als wenn dies eine Sache der Physik anstatt ein Ergebnis der irrational gewählten Einheiten wäre.

Da diese Betrachtungen hauptsächlich dem durch rationale Einheiten ausgedrückten allgemeinen Umriss der elektromagnetischen Theorie

gewidmet sind, so scheint es passend zu sein, die Sache durch die folgende Erklärung der Beziehung dieser rationalen Einheiten zu den gewöhnlichen irrationalen auseinanderzusetzen.

Der Ursprung der $4\pi$-Absurdität lag ursprünglich in der Weisheit unserer Vorfahren. Nachdem das Gesetz des umgekehrten Quadrats erkannt worden war, nämlich dass zwei Ladungen $q_1$ und $q_2$ einander mit einer Kraft abstossen, die umgekehrt wie das Quadrat ihrer gegenseitigen Entfernung sich ändert, nach der Formel

$$F = \frac{a\, q_1\, q_2}{r^2}, \qquad (3)$$

wobei $a$ als Konstante gilt, war es sehr natürlich sich zu denken, dass der Ausdruck des Gesetzes möglichst vereinfacht werde, wenn man $a$ der Einheit gleich setzte, oder vielleicht hat man sich dabei auch gar nichts gedacht. Unsere Vorfahren konnten nicht in die Znkunft blicken, wenigstens nicht über Nasenlänge hinaus, und deshalb konnten sie auch nicht bemerken, dass dieses System von den Nachkommen in ungereimter Weise ausgearbeitet werden würde. Sie waren für ihre Zeit genügend weise und daher trifft sie kein Tadel.

Aber nachdem wir gelernt haben, dass gewisse physikalische Grössen zu einander in festen Beziehungen stehen, sollten wir bei der Bildung eines dieselben repräsentierenden Systems die Einführung willkürlicher und unnötiger Konstanten zu vermeiden suchen. Dieser wertvolle Grundsatz wurde in kleinem Umfange von unseren Vorfahren erkannt, wie oben angedeutet worden ist; er wurde nachdrücklich von Maxwell und Jenkin in ihrer kleinen Abhandlung über die Einheiten in einem Berichte des Komitees der British Association über elektrische Normalien vom Jahre 1863 hervorgehoben. Bezüglich des magnetischen Gesetzes der umgekehrten Quadrate gilt danach das Folgende:

„Die Polstärke wird notwendigerweise proportional zur Kraft bestimmt, welche dadurch auf einen anderen Pol ausgeübt wird. Daher ist die zwischen zwei Polen von den Stärken $m$ und $m'$ ausgeübte Kraft $F$ proportional dem Produkt $m\,m'$ zu setzen. Diese Kraft $F$ ist aber auch umgekehrt proportional dem Quadrat der diese Pole trennenden Distanz, jedoch von keiner anderen Grösse ausserdem abhängig, daher haben wir, ohne dass ein absurder und unnötiger Koeffizient eingeführt zu werden braucht, einfach

$$F = \frac{m\,m'}{D^2}.$$

Man beachte insbesondere die gesperrt gedruckten Worte. Wenn man in Betracht zieht, was dann Maxwell auf dem Wege der

Gestaltung einer ausführlichen Theorie des Elektromagnetismus weiter gethan hat, so muss man sich wohl darüber wundern, dass er auf diese Weise geschrieben hat. Durch die blosse Macht der Gewohnheit dürfte Einer in der That wohl nicht darauf kommen, dass mit dem $4\pi$ eine Anomalie in den Lehrsätzen von Coulomb und Gauss sich eingebürgert hat. Wurde aber durch Maxwells elektrostatische Energie $KE\,2/8\pi$ und durch seine magnetische Energie $\mu K 2/8\pi$ per Volumeneinheit nicht laut verkündet, dass in dem System etwas radikal Falsches vorhanden sein müsse, das zu so einer Art von Ausdruck führt, welchen Fehler man hätte bemerken und von Anfang an hätte berichtigen sollen, besonders bei der Feststellung eines bleibenden Systems praktischer Einheiten, was doch von Maxwell und seinen Kollegen beabsichtigt wurde?

Es möchte scheinen, dass die Verkündung auf taube Ohren fiel, denn die Einheiten wurden nicht nur irrational konstruiert, sondern in seiner Abhandlung, welche einige Jahre darauf folgte, befindet sich auch noch die folgende Stelle (p. 155, 2. Aufl.). Nach einem Bericht über seine Theorie der elektrischen Verschiebung wird uns da gesagt: „Die Theorie giebt vollständige Aufklärung über das Theorem des Art. 77, dass die Gesamtinduktion durch eine geschlossene Oberfläche gleich ist der Gesamtmenge der innerhalb dieser Oberfläche befindlichen Elektrizität multipliziert mit $4\pi$. Dafür haben wir gesagt, die Induktion durch die Oberfläche ist einfach die elektrische Verschiebung multipliziert durch $4\pi$ und die Gesamtverschiebung nach aussen ist notwendigerweise gleich der Gesamtladung innerhalb der Oberfläche". — Das ist seine Theorie der elektrischen Verschiebung erklärt durch $4\pi$. Dies scheint zu genügen; und doch steht das $4\pi$ in keiner wesentlichen Verbindung mit seiner Theorie oder mit sonst einer anderen Theorie. Obgleich dies, bevor es bestimmt ausgesprochen wurde, keineswegs zweifellos ist, so ist es doch ganz eine Frage der eigeneu Wahl der Einheiten und ist unabhängig von allen Theorien der Elektrizität. Es ist von etwas viel Fundamentalerem abhängig.

Wenn man die Sache genau betrachtet, so ist die Frage einfach diese: Was ist das natürliche Mass der Stärke einer Kraftquelle? Angenommen zum Beispiel, wir haben es mit einer Wärmequelle in einem Medium zu thun, welches keine Wärme aufnimmt, wie sollen wir die Intensität der Wärmequelle messen? Einfach durch die Wärmemenge, welche in der Sekunde durch irgend eine die Wärmequelle umschliessende Oberfläche geht. Wenn die Wärmeströmung isotropisch regulär ist, so wird die Dichte umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung von einem Punkte der Wärmequelle sich ändern, so dass man hat

$$C = S/4\pi r^2, \qquad (5)$$

wobei $C$ den Wärmestrom per Flächeneinheit in der Entfernung $r$ von der Quelle der Kraftstärke $S$ bedeutet. Wenn man $4\pi$ hinauswirft, so wird man selbstverständlich ein unnatürliches Mass von der Stärke der Kraftquelle haben.

Ähnlich ist es, wenn man Wasser durch ein Rohr schickt und am Ende ausfliessen lässt, welches Ende alsdann den Charakter einer Kraftquelle annimmt; wir müssen dann die Kraftstärke dieser Quelle in ähnlicher Weise messen, nämlich entweder durch die Strömung im Rohre, oder durch den gesamten Ausfluss.

Nun haben wir in einem elektrischen Felde oder magnetischen Felde oder im Kraftfelde irgend einer vektoriellen Grösse vom mathematischen Standpunkte allenthalben analoge Fälle. Wir finden zum Beispiel, dass elektrostatische Kraft gleich der Geschwindigkeit in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit verteilt wird, mit Ausnahme gewisser Orte, wo dieselbe erzeugt wird oder ihre Quelle hat. Wenn wir dann wahrnehmen, dass der Kraftfluss durch eine geschlossene Fläche nicht Null ist, so müssen innerhalb der umschlossenen Region Kraftquellen vorhanden sein und das natürliche Mass der Gesamtstärke dieser Kraftquellen ist gegeben im gesamten Kraftfluss selbst. Diese Ausdrücke elektrischer Kraft sind vor Berücksichtigung der elektrischen Verschiebung in Betracht gezogen worden, bloss um beispielsweise zu zeigen, dass diese Sache in keiner besonderen Beziehung zur elektrischen Verschiebung steht. In dem vorhergehenden Falle wurde eine Quelle elektrischer Kraft vorausgesetzt; im letzteren Falle würde die Kraftquelle als eine Verschiebung zu betrachten sein. Das Prinzip betreffs der rationellen Bestimmung der Quellenstärke ist in beiden Fällen dasselbe. Es beruht in der Bequemlichkeit der Sache und ist für die abstrakte Theorie der Raumveränderung vektorieller Grössen wohl am Platze, abgesehen von aller physikalischen Anwendung.

Wenn man hier und da die Ausdrücke „Kraftlinien“ oder „Kraftröhren“ (welche bei alledem, wie hier, zuweilen etwas unsinnig erscheinen), so kann man wohl bei rationeller Würdigung sagen, dass ein Einheitspol Kraftlinien oder eine Kraftröhre aussendet.

Zunächst ist ein geeignetes Mass für die Stärke von Kreisströmen, zum Beispiel für die elektrische Stromstärke, in Betracht zu ziehen. Die allgemeine Eigenschaft besteht hierbei darin, dass die Zirkulierung der magnetischen Kraft proportional zu dem Strome im Stromkreise ist und daher ist das natürliche Mass für die Stromstärke in dem Kreislaufe selbst, ohne die gewöhnliche Division mit $4\pi$ zu finden. Diese Division durch $4\pi$ entsteht eben nur aus dem irrationellen Begriff über die Stärke punktueller Kraftquellen oder Kraftpunkte. Man darf daher

wohl die Erwartung hegen, dass bei rationeller Messung punktueller Kraftquellen das $4\pi$ aus den Rechnungsformeln für den elektrischen Strom verschwinden wird, indem der Kreislauf der magnetischen Kraft die passende Wertschätzung ergiebt. Dass dem so ist, mag man leicht ersehen, indem man für einen linearen elektrischen Strom das Äquivalent eines magnetischen Blättchens substituiert und somit in Punktquellen über dessen beide Flächen verteilt.

Daher haben wir in rationellen Einheiten für einen Kraftpunkt $q$ der Verschiebung und für einen Kraftpunkt $m$ der Indukton die Formeln

$$D = q/4\pi r^2 \text{ und } B = m/4\pi r^2, \qquad (6)$$

um die Verschiebung und Induktion in der Entfernung $r$ auszudrücken, wenn die Kraftströme isotropisch vor sich gehen; und

$$E = (q/c)/4\pi r^2 \text{ und } H = (m/\mu)/4\pi r^2, \qquad (7)$$

wenn $q/c$ und $m/\mu$ beziehungsweise die Masse der Quellenstärken der elektrischen und magnetischen Kraft sind. Bei der magnetischen Kraft mag $m$ die Polstärke darstellen, wobei man, weil die Induktion wirklich kreisförmig ist, die aus dem Pol kommende Kraftströmung (als längs eines fadenförmigen Magnets erfolgend) vernachlässigt und nur die divergierende Induktion berücksichtigt. Daher wird durch

$$H = C/2\pi r \qquad (8)$$

die magnetische Kraftstärke in der Entfernung $r$ von einem langen einzelnen geraden Strom, dem die Stärke $C$ zukommt, ausgedrückt.

Wenn man bloss die zu Punktquellen oder Kraftpunkten gehörigen Formeln mit einfacher Divergenz in Betracht zieht, so sieht man, dass durch den Übergang von den irrationalen zu den rationalen Einheiten das $4\pi$ eingeführt wird. Wenn dies alles wäre, so könnte man wohl die grundsätzliche Unvernunft übersehen und irrationale Einheiten der praktischen Bequemlichkeit wegen benutzen. Aber die Sache liegt noch ganz wo anders, denn der unnatürliche Ausdruck $4\pi$ in den Formeln der Zentralkräfte wird da, wo er ein Recht hat sich hinzustellen, ins Blut getrieben, um da sich selbst bacillenartig zu vermehren und um nachher über den ganzen Körper der elektromagnetischen Theorie hervorzubrechen. Die wenigen Formeln, wo $4\pi$ berechtigt ist, sind rein scholastischer Natur und werden kaum benutzt; die vielen Formeln aber, denen es aufgezwungen worden ist, sind im Gegenteil für die wirkliche Praxis und für die praktische Theorie von Nutzen. Ein praktischer Theoretiker muss sie schon der Verwirrung wegen, die sie anrichten, verwerfen, weil er die Dinge am rechten Platze sehen will. Ferner ist aber auch darauf hinzuweisen, dass die Irrationalität der

Formeln ein grosses Hindernis ist für das klare Verständnis der elektromagnetischen Theorie. So bietet zum Beispiel die Interpretation der obigen Gleichung (2) oder auch der bekannten Formel

$$B = H + 4\pi\mathfrak{J} \qquad (9)$$

selbst dem befähigten Studierenden eine ziemliche Schwierigkeit in der logischen Deutung, wenn ihm nicht einige Fingerzeige gegeben werden, denn wenn in Formel (2) $\varkappa$ eine physikalische Grösse ist, so kann $\mu$ keine solche sein, oder wenn $\mu$ berechtigt ist, so ist $\varkappa$ falsch. Oder die Grössen $B$, $H$ und $\mathfrak{J}$ müssen inkongruente Grössen sein. Das $4\pi$ ist also insbesondere bei deskriptiven Dingen mit Bezug auf Kraftröhren oder Kraftfluss und alles was damit zusammenhängt durchaus unberechtigt und unbequem.

Diese Schwierigkeit bezüglich des Verständnisses der inneren Meinung der Theorie wird aber noch dadurch vergrössert, dass $4\pi$ in die magnetischen Formeln nicht in derselben Weise wie in die elektrischen Formeln eintritt.

Die Frage ist nun, was soll man thun? Sollen wir modernen Pygmäen, die über die Schultern der früheren Riesen etwas weiter sehen können, als diese konnten, deren Fehler für immer ausüben und fortsetzen und dieselben sogar legalisieren? Da uns diese Fehler aufgezwungen worden sind, so wird man es wohl nicht als eine rügenswerte That betrachten, wenn man gesetzlich und reichsmässig festgestellte Einheiten n i c h t benutzt.

Leider sind schon Ohm, Volt u. s. w. derartig legalisiert, so dass es wohl zu spät sein wird, daran etwas zu ändern. Es sollte jedoch niemals für eine Berichtigung zu spät sein. Der Wert von $\pi$ ist bis auf hunderte von Decimalstellen berechnet worden, so dass rationale Ohm, Volt u. s. w. nunmehr mit demselben Grade von Genauigkeit berechnet werden können, wie die irrationalen. Die Kenntnis der Elektrizität ist in der letzten Zeit ausserordentlich bereichert worden und sie konkurriert mit der Entwickelung der Elektrotechnik, ganz abgesehen von der theoretischen und experimentellen Entwickelung. Es könnte deshalb wohl nunmehr eine Änderung in der angedeuteten Weise zur Ausführung kommen.

83. In der üblichen Lehrbuchweise wird die Theorie des Magnetismus etwa folgendermassen entwickelt: Die Grundaufgabe der Magnetisierung durch die Influenz eines Magnetfeldes besteht darin, dass für eine gegebene auf einen Punkt zum Beispiel eines Eisenstückes wirksame magnetische Kraft die sogenannte Magnetisierungsstärke, das ist der Wert der magnetischen Induktion für diesen Punkt, bestimmt wird.

Die magnetische Kraft oder Induktionskraft, welche hierbei in Betracht zu ziehen ist, muss als die Resultante des Kraftfeldes und der Reaktion der Oberflächenschicht der beeinflussten, das heisst der magnetisierten Masse gelten. Man bezeichnet die Induktionskraft gewöhnlich mit $B$, die ursprüngliche Kraft des Magnetfeldes oder die sogenannte Feldstärke mit $H$ und die Reaktion der magnetisierten Masse gegen das magnetische Kraftfeld, das ist die sogenannte Magnetisierungsstärke mit $\mathfrak{J}$. Es gelten dann, nach der üblichen Annahme, die Beziehungen:

$$B = \mu H \text{ und } \mathfrak{J} = \varkappa H$$

Der Faktor $\mu$ wird als der Koeffizient der magnetischen Induktion oder auch für gewöhnlich als der Koeffizient der Permeabilität oder der magnetischen Durchdringlichkeit und der Faktor $\varkappa$ als der Koeffizient der Magnetisierung bezw. als der Koeffizient der magnetischen Susceptibilität oder der magnetischen Annahmefähigkeit bezeichnet. Man hat also unter $\varkappa$ den Koeffizienten des gebundenen oder latenten Magnetismus und unter $\mu$ den Koeffizienten des wirksamen oder freien Magnetismus zu verstehen, wobei diese beiden Grössen in der Bedeutung von Wirkung und Gegenwirkung zu einander in Beziehung zu stellen sind. Man kann auch $\mu$ als den Koeffizienten der magnetischen Kapazität und $\varkappa$ als den Koeffizienten der magnetischen Selbstinduktion des Kraftfeldes $H$ bezeichnen, wobei $H$ als Ausdruck der Kraftgrösse dieses Feldes vor Eintritt der Erregung durch Einwirkung der äusseren Induktion durch die magnetomotorische Kraft $B$ anzunehmen ist. Es bedeutet also $H$ die spezifische ursprüngliche Kraft des an und für sich vielleicht scheinbar noch ganz unmagnetischen Feldes, also beispielsweise den Raum zwischen den Magnetpolen einer noch nicht in Betrieb gesetzten dynamoelektrischen Maschine, wobei — nach dem dynamischen Prinzip — aber bereits ein gewisser, wenn auch verhältnismässig sehr geringer Grad von Magnetismus vorhanden sein muss; ferner kann man aber mit $H$ auch den Raum innerhalb einer noch nicht vom eigentlich magnetisierenden Strome durchlaufenen Drahtspule bezeichnen, insofern dieser Raum als ein Teil des erregbaren erdmagnetischen oder gravimotorischen Kraftfeldes zu betrachten ist. Es bezeichnet also $H$ eigentlich nur die Fähigkeit eines gewissen Raumes oder auch eines gewissen Materialvolumens zur Magnetisierung, insofern man mit $H$ sowohl ein äusseres, als auch ein inneres Magnetfeld bezeichnen kann.

In der Lehre vom Magnetismus wird neben den schon erwähnten Beziehungen:

$$B = \mu H \text{ und } \mathfrak{J} = \varkappa H$$

noch die Beziehung aufgestellt:

$$B = H + 4\pi\varkappa H = H + 4\pi\mathfrak{J}.$$

Hiernach wird einmal die Induktion oder magnetomotorische Kraft $B$ der Grösse $\mu H$ des im magnetischen Kraftfelde sich verlierenden oder gebundenen Magnetismus oder der Kapazität dieses Magnetfeldes gleichgesetzt und dann wird auch diese magnetomotorische Kraft als gleich der Summe aus der ursprünglichen spezifischen Kraftgrösse $H$ und der Grösse des freien Magnetismus oder der Magnetisierungsstärke $4\pi\mathfrak{J}$ erachtet. Dies ist aber als eine rein willkürliche Annahme anzusehen. Die daraus gezogene Folgerung

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa$$

kann daher nicht als gerechtfertigt gelten.

Insofern die Grösse $H$ als ursprünglicher Wert des magnetischen Kraftfeldes anzusehen ist, kann diese Grösse nicht durch die Beziehung:

$$H = \frac{B}{1 + 4\pi\varkappa}$$

bestimmt werden, denn $H$ ist eine von der Induktion $B$ und dem Koeffizienten $\varkappa$ der magnetischen Annahmefähigkeit und von der Durchdringlichkeit $\mu$ abhängige Grösse, welche schon vor der Einwirkung der Induktion oder magnetomotorischen Kraft vorhanden war. Ferner wird aber durch die magnetomotorische Kraft nicht nur der latente Magnetismus $\mu H$, sondern auch die vom unlogischen Faktor $4\pi$ befreite Magnetisierungsstärke oder der freie Magnetismus $\mathfrak{J}$ geliefert, so dass die Beziehung besteht:

$$B = \mu H + \mathfrak{J} = \mu H + \varkappa H = H(\mu + \varkappa).$$

Hieraus würde für die Grösse der zur Schaffung der Kraft $H$ des ursprünglichen Magnetfeldes erforderlichen magnetomotorischen Kraft, das ist für $B = H$ sich ergeben:

$$\frac{B}{H} = 1 = \mu + \varkappa,$$

oder

$$\mu = 1 - \varkappa.$$

Für $\varkappa = 0$ besitzt also das von der magnetomotorischen oder gravimotorischen Kraft beeinflusste Kraftfeld, beziehungsweise eine davon beeinflusste Masse keine magnetische Annahmefähigkeit, sondern nur Durchdringlichkeit, so dass die magnetischen Kraftlinien sämtlich frei und ungeschwächt hindurchgehen und die Masse als unmagnetisch erscheint. Für $\varkappa$ kleiner als Eins bis $\varkappa = 1$ ist die Masse magnetisierungsfähig oder paramagnetisch und der höchste Grad dieser Eigen-

schaft wird für $\varkappa = 1$ erreicht, weil alsdann alle Kraftlinien für die Erzeugung von freiem Magnetismus, das ist für die Magnetisierung des Kraftfeldes bezw. der induzierten Masse ausgenutzt werden. Für $\varkappa$ grösser als Eins ist die Masse diamagnetisch, das heisst, sie vermag die zugesendeten Kraftlinien nicht mehr vollständig zu verarbeiten, so dass diese im äusseren Kraftfelde eine grössere Dichte besitzen als im inneren, induzierten Kraftfelde, wie dies auch aus der bekannten Darstellung der Kraftlinienverteilung bezüglich paramagnetischer und diamagnetischer Substanzen hervorgeht.

Es ist eine logische Forderung, dass die Grössen $B$, $\mu H$ und $\varkappa H$ von gleicher Grössenordnung sind, das heisst, dass diese Grössen durch eine und dieselbe physikalische Dimensionsformel definiert werden, dasselbe gilt aber auch bezüglich der Grössen $\mu$ und $\varkappa$ unter sich. Diese Grössen haben eine physikalische Bedeutung und sind keineswegs bloss numerische Faktoren, wie in den Lehrbüchern angenommen wird. Nur durch die falschen Beziehungen, in die man diese Grössen zu einander gebracht hat, kam man über den wahren Charakter dieser Grössen nicht zur Klarheit.

Unzweifelhaft sind die Naturkräfte ausnahmslos als Molekularkräfte anzusehen, welche als Zentralkräfte ihre freie Wirkung in konzentrischen Kegelflächen entfalten, so dass diese Wirkung durch das Gesetz der umgekehrten Proportionalität der Quadrate der Entfernungen vom Kraftzentrum geregelt wird und deshalb auf die Krafteinheit der Kugelfläche vom Radius Eins, das ist auf $4\pi$ zu beziehen ist. Da nun aber alle Molekularkräfte ohne Ausnahme als Zentralkräfte zu gelten haben, so ist der ihre Wirkungsweise kennzeichnende Faktor $4\pi$ unnötig, oder er müsste durchgängig den bezüglichen Kraftausdrücken beigefügt werden. Ganz widersinnig ist es aber, bloss einzelne dieser Kraftgrössen in ganz willkürlicher Weise durch Vorsetzung dieses Faktors auszuzeichnen und so Beziehungen zwischen rationalen und unrationalen, das ist zwischen relativ statischen und dynamischen Grössen zu formulieren, wodurch inhomogene Gleichungen geschaffen werden, die als unlogisch zu verwerfen sind. Insofern der Ausdruck $4\pi$ auch noch mit dem Faktor $r^2 = 1^2$ behaftet ist, hat derselbe an und für sich eine physikalische Bedeutung.

84. Wird ein Kraftfeld durch eine motorische Kraft $B$ induziert, so gilt ganz im allgemeinen die oben aufgestellte Gleichung:

$$B = \mu H + \varkappa H = H(\mu + \varkappa).$$

Diese Gleichung ist aber als identisch mit der auf S. 155 aufgestellten Gleichung:

$$2\, v_1^2 v_2^2 = k\,(v_1^4 + v_2^4)$$

anzusehen, welche aus der für den Wirkungsgrad des Kräftesystems auf S. 144 entwickelten Grundformel:

$$\cos^2 \varphi = \frac{4 v_1^2 v_2^2 \sin^2 a}{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4 v_1^2 v_2^2 \cos^2 a}$$

hergeleitet wird, wenn man $\cos^2 \varphi = k$ und $a = 45^\circ$ setzt, wobei eine unendliche Annäherung der Kräfte $v_1^2$ und $v_2^2$ an die Grenze der Gleichheit anzunehmen ist, so dass man für die praktische Rechnung $v_1 = v_2$ und $\cos \varphi = 1$ setzen kann, wogegen aber prinzipiell nur eine unendliche Annäherung an diese Grenzen ins Auge zu fassen ist, weil Kräfte nie vollständig zur Ausgleichung kommen, wie dies aus der bekannten, von Helmholtz aufgestellten, aber doch nur einseitig gedeuteten Formel

$$I_t = \frac{E}{R}\left(1 - I^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

hervorgeht, welche Formel in der für $\cos^2 \varphi$ aus dem Parallelogrammgesetz entwickelten Formel ihren allgemeinen Ausdruck und ihre rationelle Deutung findet. Es ist bezüglich der physikalischen Kräftebeziehungen stets daran zu denken, dass das dynamische Prinzip allgemeine Geltung hat, wonach keine Kraft sich aus dem absoluten Nullpunkt entwickeln, aber auch keine Kraft im absoluten Nullpunkt verschwinden kann. Nur die von der Wirklichkeit absehende abstrakte Mathematik kann zu solchen absurden Resultaten gelangen.

Der oben aufgestellten Gleichung kann man auch für $k = 1$ die Form geben:

$$\frac{\sqrt{v_1^4 + v_2^4}}{v_1 v_2} = \sqrt{2}$$

und wenn man setzt:

$$\sqrt{v_1^4 + v_2^4} = w \text{ und } v_1 v_2 = u,$$

so ergiebt sich die einfache Beziehung:

$$\frac{w}{u} = \sqrt{2}.$$

Es entspricht diese Gleichung, wie schon auf S. 154 nachgewiesen wurde, der Beziehung zwischen den Wärmekapazitäten bei konstantem Druck *(w)* und bei konstantem Volumen *(u)*. Indem das äussere gravimotorische Kraftfeld mit konstantem Drucke gegen die rotierenden magnetisierten Moleküle wirksam ist und diesen den zur Erhaltung ihres rotierenden oder oszillierenden Bewegungszustandes nötigen Kraftzufluss kontinuierlich liefert, bleiben die Volumenkräfte dieser schwingenden Moleküle, die nach der Ampèreschen Theorie als kleine elektrische Kreisströme zu denken sind, konstant erhalten. Die von diesen molekularen elektrischen Kreisströmen entwickelte Wärme ist aber hierbei

gerade ausreichend, um die molekularen Bewegungswiderstände auszugleichen. In den Magnet beziehungsweise in das innere magnetische Kraftfeld dringen die Kraftlinien des äusseren Kraftfeldes als dynamische Ätherwellenzüge ein; indem diese dynamischen hintereinandergeschalteten Kraftimpulse ihre lebendige Kraft an die schwingenden magnetisierten Moleküle abgeben, schalten sie sich in Äquipotentialflächen parallel und streben daher nach Verkürzung, wie dies schon von Faraday nachgewiesen worden ist. Der seiner lebendigen Kraft beraubte Äther breitet sich dann als relativ statischer Äther in Potentialflächen wieder im äusseren Raume aus. Die schwingenden magnetischen Moleküle, welche bei der Annahme von $\alpha = 45^\circ$ (nach S. 134) zufolge der hier ins Auge gefassten abstrakten Theorie die maximale Kraftstärke entwickeln, sind mit Achsialturbinen oder Reaktionswasserrädern zu vergleichen, die von innen durch Druckwassersäulen (Kraftlinien) gespeist werden und das der motorischen Kraft beraubte relativ statisch gewordene Betriebsmedium als Stauwasser wieder nach aussen abgeben. Bei einem vom elektrischen Strome durchflossenen Leiter können dagegen die schwingenden Moleküle mit Tangentialturbinen verglichen werden, welchen das motorische Druckwasser von aussen zugeführt wird, das in der Mitte nach achsialer Richtung abströmt.

Der hier geschilderte Vorgang der Magnetisierung ist als eine adiabatische Zustandsänderung zu betrachten, wobei von aussen dem System weder Wärme zugeführt noch von innen Wärme abgeführt wird, weil die innerhalb durch die elektrischen molekularen Kreisströme erzeugte Wärme zur Ausgleichung der molekularen Widerstände in mechanische Arbeit umgesetzt wird, so dass der dynamische Äther des gravimotorischen äusseren Kraftfeldes nur mit einem Kraftdifferential zweiter Ordnung, das ist mit einer verschwindend kleinen motorischen Kraft, in Mitwirkung tritt.

Streng genommen gilt also in diesem Falle, wie auch bei anderen Naturvorgängen, das Prinzip der Erhaltung der Kraft nur für das ganze, zusammenhängende, unendliche System des Universums, für welches unser Denken keinen Abschluss und keine Grenze findet, aber eben durch diese Anwendung auf die Unendlichkeit verliert wiederum dieses Prinzip seine Bedeutung, weil bei einer unendlichen Grösse das Hinzuthun oder die Hinwegnahme einer endlichen Grösse bedeutungslos für das grenzenlose Ganze ist. Das Prinzip der Erhaltung der Kraft ist daher nur als ein empirisches, innerhalb der Beobachtungsgrenzen sich bewährendes Gesetz zu betrachten, wie dies auch aus der oben erwähnten Bedeutung der für den dynamischen Wirkungsgrad eines Kräftesystems entwickelten Formel

$$\cos^2 \varphi = \frac{v_1^2 \, v_2^2 \sin^2 a}{\left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}\right)^2 - v_1^2 \, v_2^2 \cos^2 a}$$

bei unendlicher Annäherung der Kräfte $v_1^2$ und $v_2^2$ an die Grenze der Gleichheit hervorgeht, wobei der statische Wirkungsgrad $\cos \varphi$ sich der Grenze Eins bis auf eine verschwindende Differenz nähert, der dynamische Wirkungsgrad $\cos^2 \varphi$ aber merklich von dieser Grenze zurückgeschoben wird.

Wird die Magnetisierung als eine Arbeitsgrösse betrachtet, welche durch eine Potentialdifferenz herbeigeführt wird, so kann man der im vorhergehenden Paragraphen für den Vorgang der Magnetisierung aufgestellten Gleichung auch die Form geben:

$$B - \mu H = \varkappa H$$

und diese mit der allgemeinen Grundgleichung der mechanischen Physik, welche auf S. 143 aus dem Parallelogrammgesetz entwickelt worden ist, in Beziehung setzen. Diese Grundgleichung lautet:

$$\frac{R^2}{2} - \frac{S^2}{2} = R\,S \text{ cotang } a \cos \varphi$$

oder

$$\left(\frac{R^2 - S^2}{2}\right) \sin a = R\,S \cos a \cos \varphi.$$

Die Winkelfunktionen haben hierbei die Bedeutung von Kraftstreckenverhältnissen, welche im allgemeinen durch $L\,L^{-1}$ zu definieren sind. Ebenso entsprechen die Grössen $R$ und $S$ Kraftstrecken, die Grössen $R^2$ und $S^2$ dagegen Kraftflächen, welche als halbe Kugelflächen einseitig in der Form von lebendigen Kräften durch Influenzierung wirksam werden. Führt man nun für diese Grössen beziehungsweise das Symbol $L$ der Kraftstrecken und das Symbol $L^2$ der Kraftflächen ein, so erhält man die symbolische Formel:

$$L^5 = L^3 \,.\, L^2.$$

Es ist nun daran zu erinnern, dass im elektrostatischen System die Magnetismusmenge oder die statische Grösse der Induktionskraft durch die Formel $L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$ und im elektromagnetischen oder elektrodynamischen System das sogenannte magnetische Moment, wofür wir die Bezeichnung „magnetomotorische Kraft“ oder „Induktionsstärke“ einführen möchten, durch die Formel $L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$ definiert wird.

Es bedarf wohl keiner Auseinandersetzung, dass man physikalische Raumgrössen nicht mit Grössen von anderen Dimensionen multiplizieren oder dividieren kann, sondern dass diese Rechnungsoperationen nur mit numerischen Faktoren denkbar sind, so dass das Symbol $M$ der Masse

und das Symbol $T$ der Zeit, welche in jenen Formeln eingeführt sind, gegenüber der in räumlichen Dimensionen ausgedrückten direkten Kraftgrösse nur die Bedeutung dimensionsloser numerischer Faktoren haben können und also bezüglich der physikalischen Bedeutung jener Formeln einfach zu eliminieren sind, oder dass man mit Rücksicht darauf, dass Masse und Zeit ebenfalls nur durch Raumstrecken, bezw. Raumstreckenverhältnisse gemessen werden*), für die Symbole $M$ und $T$ in der dynamischen Formel $L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$ das Symbol der Raum- oder Kraftstrecke $L$ einsetzen muss, wodurch wir $L^{\frac{5}{2}}$, bezw. $L^5$ erhalten.

Hieraus folgt, dass die dynamische Induktionsstärke $B$ durch $L^5$ zu symbolisieren ist, wobei diese Grösse in der Zerlegung als Produkt $L^3 . L^2$ einer Mehrzahl von Volumenkräften oder elementaren motorischen Kräften $L^3$ entspricht, welche in einer Äquipotentialfläche $L^2$ parallel geschaltet sind, wobei natürlich wiederum das Flächensymbol $L^2$ gegenüber der Kraftgrösse $L^3$ die Bedeutung eines numerischen Faktors hat.

85. Wird ein Körper im Schwerkraftsfelde in Rotation versetzt, so wird der Kraftzustand zwischen diesem Körper und dem Kraftfelde im Vergleich zu dem vorhandenen Ruhezustand des Körpers aufgehoben und somit der bis dahin bestehende Gleichgewichtszustand des Systems gestört, so dass, sobald die auf die Vergrösserung der Winkelgeschwindigkeit des Körpers hinwirkende Kraft ihre Wirkung einstellt und somit der Körper mit einer gewissen Rotationskraft begabt ist, sich ein neuer Gleichgewichtszustand herzustellen sucht. Der frühere Gleichgewichtszustand kann nur durch die Beseitigung der Rotationskraft wieder eintreten, da aber, sobald keine kraftaufzehrenden Widerstände vorhanden sind und das System vollständig isoliert gedacht ist, nur noch adiabatische Zustandsänderungen stattfinden können, so wird die Ausgleichung der Störung durch ein Hin- und Herschwanken zwischen dem Plus und dem Minus der dem System aufgezwungenen Kraft sich vollziehen. Durch die der Masse im Schwerkraftsfelde aufgezwungenen Rotation wird dieser Masse eine Kraft eingepflanzt; diese Kraft wird aber als die Resultante aller Wirkungen an dem Trägheitsmittelpunkte oder Schwerpunkte zum Angriff kommen, so dass nach dem auf S. 26 aufgeführten Satze von der Bewegung des Schwerpunktes nur noch die Bewegung dieses Punktes in Betracht zu ziehen ist, weil derselbe in Bezug auf das Kräftespiel die Wirkung der Masse vollständig ersetzt.

---

*) Die Masse messen wir durch das Produkt $Mg$ oder für die Masseneinheit einfach durch $g$, wobei $g$ als Beschleunigung der Schwerkraft die Bedeutung einer Kraftstrecke hat. Die Zeit messen wir mittels der Kreisteilung im Verhältnis zum Kreisumfange.

Wenn der rotierende Körper freies Spiel hat, indem er ausserhalb seines Schwerpunktes in einem Punkte seiner Drehachse derartig gestützt ist, dass er frei nach allen Seiten hin schwingen kann, so vollzieht sich die Rotation nicht mehr um die eigentliche Drehachse, sondern — wie zuerst von Euler nachgewiesen worden ist — um eine fortwährend ihre Lage gesetzmässig ändernde, durch den festen Stützpunkt des rotierenden Systems gehende ideale Achse, so dass man während eines sehr kurzen Zeitintervalls annehmen kann, der betreffende Körper drehe sich mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit um eine derartige sogenannte Momentanachse *).

Die Schwerkraft braucht eine gewisse Zeit, um die Kraftstrecke des aus seiner horizontalen Lage aufsteigenden Radius der mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit rotierenden Scheibe bis zu deren Trägheitsmittelpunkt zu durchlaufen. Je grösser die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Scheibe ist, um so grösser wird der Winkel $w$ sein, um welchen der gedachte Radius aus seiner horizontalen Lage, das heisst aus der Neutralrichtung des Schwerkraftsfeldes, emporsteigen kann, bevor seine gegen das Schwerkraftsfeld sich mehr und mehr entwickelnde Kraftstrecke von der Schwerkraftswirkung durchlaufen und somit vom Schwerkraftsfelde wiederum neutralisiert wird. Der gleichzeitig aus der Vertikalrichtung um den Winkel $w$ in der Drehungsrichtung ausweichende Radius entzieht sich dagegen der Schwerkraftswirkung. Hieraus folgt, dass der Trägheitsmittelpunkt, bezw. der Schwerpunkt der rotierenden Scheibe einen einseitigen Druck erfährt, der sich bis zum Eintritt des Winkels $\alpha$ in die Mittelrichtung der beiden gegen einander wirkenden Kraftfelder (der Schwerkraft und der rotierenden Scheibe), das heisst bis zum Grenzwerte $\alpha = 45^\circ$ in der Intensität steigert und dann wieder abnimmt, weil in der Vertikalrichtung das Schwerkraftsfeld nicht mehr dynamisch, sondern relativ statisch auf die momentan in der Horizontalrichtung, das ist in der Neutralrichtung des Schwerkraftsfeldes ausweichenden Kraftpunkte der rotierenden Masse einwirkt.

Der Ausgleichungswinkel $w$ wird bestimmt durch das Verhältnis der Tangentialkraft zur Radialkraft. Bezeichnet man die Radialkraft mit $q$ und die Tangentialkraft mit $\gamma$, so besteht die Proportion:

$$q : \gamma = \sin w : \cos w,$$

woraus folgt:

$$\frac{\gamma}{q} = \frac{\cos w}{\sin w} = \operatorname{cotang} w.$$

*) Schwartze, „Die Lehre von der Elektrizität“, S. 145.

Dies ist die für sinusoidale Schwingungen, das ist für harmonisch wirkende Kräfte geltende Beziehung, welche natürlich nur für frei wirkende Kraftpunktsysteme, also nur im prinzipiellen abstrakten Sinne, Geltung hat.

Auf S. 130 wurde aus der allgemeinen Kraftformel die Gleichung für die relativ gleichförmige Bewegung in der Kreisbahn entwickelt. Diese bekannte Gleichung hat die Form:

$$v^2 = p\,r.$$

Differenziert man dieselbe nach $p$ und $r$, so erhält man:

$$v = \gamma = \frac{p}{2}\,\frac{d\,r}{d\,v} = q\,\frac{d\,r}{d\,v}.$$

Nach Fig. 7 auf S. 130 ist aber für den Kontingenzwinkel zu setzen:

$$\frac{d\,r}{d\,v} = \text{cotang}\; w,$$

so dass man durch diese Differentiation die aus den vorhergehenden Betrachtungen sich ergebende Formel erhält, wobei nicht die lineare Grösse, sondern das Wachstum von Sinus und Cosinus in Betracht zu ziehen ist, so dass statt des Sinus der Cosinus und statt des Cosinus der Sinus zu setzen ist. Im übrigen kommen die in Paragraph 64 angestellten Betrachtungen auch hier zur Geltung.

86. Es sei nun eine vertikal im Schwerkraftsfelde rotierende homogene Kreisscheibe gedacht, deren horizontaler Durchmesser mit einer gewissen Winkelbeschleunigung aus der Neutralebene des Schwerkraftsfeldes durch eine fremde äussere, in das im Gleichgewicht befindliche System störend eingreifende Kraft herausgetrieben wird, so dass der horizontale Durchmesser durch den Kraftimpuls sich in Uhrzeigerrichtung um den Winkel $w$ aus der horizontalen Lage herausdreht und seine freien Kraftpunkte daher mit einem entsprechenden Drucke momentan gegen das Schwerkraftsfeld einwirken, wie dies durch frei in die Höhe geworfene Masseneinheiten geschehen würde. Selbstverständlich kommen dabei die durch die Abstände der einzelnen Massenpunkte vom Drehungszentrum bestimmten Drehungsmomente in Betracht, wobei man die Resultante dieser Drehungsmomente bezüglich der in dem gedachten Radius befindlichen Massenelemente anzunehmen hat, welche im Trägheitsmittelpunkte dieses Radius angreift. Ganz dasselbe gilt auch für den diametralen, um den Winkel $\alpha$ nach unten aus der horizontalen Lage gestossenen Radius, dessen Massenelemente sich zur Wirkung der Schwere wie vertikal abwärts geworfene Masseneinheiten verhalten, wenn der Beschleunigungs- oder Stosswinkel $\alpha$ genügend klein angenommen worden ist.

Die auf diese Weise momentan einerseits aufwärts, anderseits abwärts gestossenen Massenelemente und die aller übrigen elementaren Radien der Scheibe entfalten ihre freie Trägheitswirkung in der Horizontalrichtung, indem sie nach dem Prinzip des kleinsten Zwanges bei Druckvermehrung sich nach innen schieben, um den Druck zu vermindern, oder bei Druckverminderung sich nach aussen schieben, um den Druck zu vermehren. Es erklärt sich dieser Vorgang einfach nach dem Kausalprinzip, indem in den beiden diametralen Quadranten, in welchen die Massenelemente einesteils der Strömungsrichtung mit Beschleunigung entgegengeführt werden, andernteils mit Verzögerung der Strömungsrichtung folgen, diese Massenelemente in der Drehungsrichtung nach innen geschoben werden, dagegen wird in den beiden anderen Quadranten, in denen die Massenelemente einesteils der Schwerkraftsströmung mit Beschleunigung entzogen, andernteils dieser Strömungsrichtung mit Verzögerung, wenn auch mit wachsender Geschwindigkeit entgegengeführt werden, die Verschiebung der Massenelemente in der Drehungsrichtung nach aussen erfolgen. Hierdurch wird bewirkt, dass die Durchmesser, in denen Minimal- und Maximalwirkung des Schwerkraftsfeldes vorhanden ist, in der Drehungsrichtung entsprechend der Drehungsbeschleunigung um einen gewissen Winkel sich schräg gegen die Horizontalrichtung, beziehungsweise Vertikalrichtung einstellen und somit das Schwerkraftsfeld in seinem tangentialen Maximaldruck gegen den Durchmesser des radialen Minimaldrucks in schiefer Richtung wirksam wird, wodurch die in einem Punkte ihrer Drehungsachse ausserhalb des Schwerpunktes frei beweglich gestützte Scheibe der Präzessionsbewegung unterliegt, deren Grösse durch die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe bedingt ist, aber einen Maximalwert erreicht, sobald die Ablenkungswinkel der Hauptträgheitsdurchmesser mit den beiden Normalrichtungen des Kraftfeldes in den Grenzwert 45° eintreten, wo ein Ausgleich zwischen der Schwerkraftsbeschleunigung und der Zentralbeschleunigung der rotierenden Masse stattfindet.

Sobald der rotierenden Scheibe eine gewisse konstante Wirbelgeschwindigkeit eingepflanzt und somit der Grenzwert des Ablenkungswinkels $\alpha$ der Hauptträgheitsdurchmesser bestimmt worden ist, der mit unendlich wachsender Winkelgeschwindigkeit dem absoluten Grenzwerte von 90° zusteuert, wird die frei bewegliche, nur einseitig gestützte Scheibe der regelmässigen Präzession und Nutation unterliegen, indem ihr Trägheitsmittelpunkt beziehungsweise Schwerpunkt unter dem periodischen Wechselspiel der Schwerkraft und Trägheit hin- und herpendelt und dabei in Folge der vorhandenen tautochronen Bewegungen cykloidische Kurven durchläuft, wie dies bereits im

Jahre 1889 von dem Verfasser in dem Repertorium für praktische Physik, sowie in anderen Zeitschriften in der Aufstellung des Prinzips vom dynamischen Schwerpunkte nachgewiesen worden ist. Weiteres darüber findet sich auch in des Verfassers Werke: „Die Lehre von der Elektrizität“.

87. Die Gravitationskraft bezw. Schwerkraft ist als die Primärkraft des Naturganzen anzusehen und die von Galilei aufgestellten Schwerkraftsgesetze haben als allgemeine Kraftgesetze zu gelten.

Bezeichnet man die relativ konstante Kraftstärke oder Spannung, das heisst den scheinbar indifferenten, aber stets zur Auslösung und pulsiven Entladung geneigten Zustand des Schwerkraftsfeldes mit Rücksicht auf das unendlich kleine spezifische Zeitintervall $dt$ mit $adt$, wobei $a$ die für die Masseneinheit statisch gemessene Pressung der Schwerkraftswirkung bedeuten mag, so gewinnt der Ausdruck $a.dt$ wegen der Beziehung einer relativ statischen Grösse auf ein Zeitelement die Bedeutung einer Kraftstärke oder einer sich differenzierenden Intensität. Für eine bestimmte Grösse der Kraftwirkung muss die als motorische Kraft auf den Zeitverlauf verteilte Spannung um so grösser sein, je kürzer die Wirkungszeit ist, denn es muss eine dem Zeitverlauf umgekehrt proportionale Kraftgrösse zur Auslösung kommen. Zur Feststellung des Begriffes ist es ratsam, in ähnlicher Weise wie Galilei die Bethätigung der Muskelkraft in Betracht zu ziehen. Es wird dann sofort klar, dass die Anstrengung um so grösser sein muss, in je kürzerer Zeit eine Arbeit ausgeführt wird. Denkt man sich die Anstrengung in pulsiver Weise zum Ausdruck kommend, so sind um so mehr Kraftdifferentiale in der Zeiteinheit zu häufen, je rascher eine bestimmte Kraftgrösse akkumuliert werden soll.

Jeder Wirkung entspricht natürlich eine gleichwertige Gegenwirkung, die aber nicht in der Zeit mit der Primärwirkung zusammenfällt, denn die Ursache muss der Wirkung vorausgehen, sonst wäre überhaupt keine Dynamik möglich. Jeder Ausgleich von Kräften begründet sich auf eine variable Periode, wo Wirkung und Gegenwirkung sich mit verschiedenen Intensitäten oder Kraftstärken, wenn auch mit gleichen Kraftgrössen, gegenüberstehen, wie dies in der Gleichung

$$p \cos a = q \sin a$$

zum Ausdruck kommt.

Bezeichnet man den zur Herbeiführung der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung erforderlichen Zeitverlauf mit $t$, so wird zur Wertbestimmung der als Kraftstrecke auftretenden Schwerkraftswirkung der Ausdruck gewonnen

$$at.dt = ad\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

und das zwischen den Grenzen $o$ und $t$ entwickelte Integral dieses Ausdrucks ergiebt die schon von Galilei zur Bestimmung der Fallhöhe in der Zeit $t$ unter der Wirkung der konstant gedachten Spannung oder Beschleunigung $g$ des Schwerkraftsfeldes aufgestellte Formel

$$h = g/_2\, t^2.$$

In dieser Formel bezeichnet $g$ die am Ende der ersten Fallsekunde vorhandene Bewegungsgrösse der Masseneinheit, diese Bewegungsgrösse ist aber gleichwertig der Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement seinen Weg fortsetzen würde, wenn am Ende der ersten Fallsekunde die wirksame Kraft nulliert worden ist, was bekanntlich mittels der Fallmaschine bewerkstelligt werden kann.

Wenn nun das Schwerkraftsfeld auf das ponderable Massenelement in der Zeit $t$ mit dem dynamischen Kraftfaktor $g/_2\, t^2$ und in der Zeit $(t + 1)$ mit dem dynamischen Kraftfaktor $g/_2(t + 1)^2$ einwirkt, so erhält man für das letzte Zeitintervall des Vorganges den Wirkungszuschuss

$$f = g/_2\, (t + 1)^2 - g/_2\, t^2 = g\,t + g/_2 = g/_2\, (2\,t + 1).$$

Es folgt hieraus, dass im Schwerkraftsfelde eine konstante Wirkung $g/_2$ vorhanden ist, welche natürlich jenseit des Nullpunktes, der sich durch die Ausgleichung zwischen Wirkung und Gegenwirkung ergiebt, einen negativen Charakter hat, wie auch aus der Summationsreihe

$$g/_2\,(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n^{-1}) = g/_2(-^{(-1)} + 0 + 1 + 3 + 5 + \ldots 2n)$$
$$= g/_2\, n^2 = g/_2 + t^2$$

hervorgeht.

Am Ende des zweiten spezifischen Zeitintervalls einer konstanten Kraft ist nach der Formel $g\,t = g/_2\, t^2$ für $t = 2$ die Geschwindigkeit gleich der Kraftstrecke. Die Gleichheit der Faktoren der Kraftwirkung: Druck $\times$ Geschwindigkeit entspricht aber dem Maximum der Kraftwirkung $g^2$. Auf das erste spezifische Zeitintervall reduziert, ergiebt sich der Ausdruck für die lebendige Kraft $g^2/_2$, der aus dem Produkt: Geschwindigkeit $g$ durch Druck oder Kraftstrecke $g/_2$ gebildet ist.

Nimmt man an, dass in der variablen Periode, das ist vor dem Ausgleich, eine Verschiedenheit bezüglich der Intensität (nicht der statischen Grösse) von Wirkung und Gegenwirkung bestehe, wie dies durch die Formel

$$p \cos a = q \sin a$$

symbolisiert wird, so kann man die Gleichung bilden:

$$v_1{}^2 - v_2{}^2 = 2\, v_1\, v_2 \cos a,$$

welche auf S. 145 der Form nach aus der Hauptgleichung

$$\cos\varphi = \frac{2\,v_1\,v_2\,\sin\alpha}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4\,v_1^2\,v_2^2\,\cos^2\alpha}}$$

für $\cos\varphi = \sin\alpha$ entwickelt worden ist.

Für den neutralen Zustand des Systems, welcher in der Differentiation der lebendigen Kraft

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\,.\,dv$$

seinen Ausdruck findet, wobei der eine Kraftfaktor (Druck oder Geschwindigkeit) sich der Grenze 0 nähert, ist $\cos\alpha = 0$, das ist $\alpha = 90^\circ$ und die Kombinationsresultante gleich der Kompensationsresultante, das heisst Wirkung gleich Gegenwirkung zu setzen. Die Molekularkraft (Disaggregationskraft) bezw. die Aggregationskraft, das heisst die Arbeit des inneren oder die des äusseren Kraftfeldes tritt dann in ihr Maximum. Dieser Zustand wird durch die Formel

$$k\,v_x = v^2$$

symbolisiert, wobei $k$ eine von dem Verhältnis der Intensitäten der beiden Kraftfelder bezw. von dem Verhältnis der momentanen Kraftstreckenentwickelung bedingte relative Konstante bedeutet, welche dem Ausdrucke

$$\frac{v - v}{\cos\alpha} = \frac{0}{0} = k$$

entspricht.

Wird in der Formel

$$f = g/_2\,(2\,t + 1)$$

die Zeit $t = 0$ gesetzt, so ergiebt sich $f = g/_2$. Man kann die Grösse $g/_2$ als den Differentialquotienten der kleinsten lebendigen Kraft des Schwerkraftfeldes ansehen, denn es ist

$$\frac{d\,(g^2/_4)}{d\,g} = g/_2.$$

Es folgt hieraus, dass die kleinste Wirkung des Schwerkraftfeldes eine zeitlose Grösse ist und als identisch mit dem Koeffizienten der Selbstinduktion (bezw. der Kapazität) des Schwerkraftfeldes angesehen werden kann, indem dieser Koeffizient entsprechend der Elektrizitätslehre durch die zeitlose Kraftstrecke *(L)* definiert wird. Es stimmt diese Anschauung mit dem Ausspruche Jacobis überein, welcher behauptete, dass die Gleichung der geringsten Wirkung erst einen Sinn erhalte, wenn die Zeit eliminiert und alles auf Raumelemente reduziert werde*).

*) Vorlesungen über Dynamik von C. G. J. Jacobi, gehalten im Wintersemester 1842—43 an der Berliner Universität, herausgegeben von A. Clebsch, Berlin 1866.

Für $t = 1$ ergiebt die obige Formel $f = \frac{3}{2} g$ bezw. $F = \frac{3}{2} g^2$.

Mit Bezug auf die oben angenommene Herleitung von $g/_2$ aus der kleinsten lebendigen Kraft oder Selbstinduktion des Schwerkraftfeldes ist zu bedenken, dass diese lebendige Kraft für die Zeit $t = 0$ nur relativ statisch als kinetischer Druck wirksam ist, und dass dieser kinetische Druck in der Summe von Wirkung und Gegenwirkung gleich $g^2/_2$ zu setzen ist. Es würde rationell sein, wenn man das dynamometrische Massengewicht durch $g^2/_2$ und die absolute Masseneinheit durch $g/_2$ bezeichnete, wodurch in der Bezeichnung dieser Begriffe ein logischer Unterschied stattfände, während die jetzige Bezeichnung der Gewichtseinheit und Masseneinheit durch $g$ verwirrend ist*).

Bezüglich der Deutung der Kraftgrössen

$$\tfrac{1}{2} g^2 \text{ und } \tfrac{3}{2} g^2$$

ist noch Folgendes zu bemerken:

Die Grösse $\frac{1}{2} g^2$ entspricht dem neutralen Zustande des Systems, welcher durch die Formel

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{v_2^2}{2} + v_1 v_2 \cos a \qquad (1)$$

symbolisiert ist. In dieser Bedeutung ist aber diese Formel als identisch mit der Vektorengleichung

$$\frac{R^2}{2} = \frac{S^2}{2} + 2 R S \operatorname{cotang} a \cos \varphi \qquad (2)$$

für cotang $a = 1$, das ist für $a = 45^\circ$ zu betrachten und in ersterer Formel das Phasen- oder Kraftstreckenverhältnis anstatt durch $\cos a$ durch $\cos \varphi$ auszudrücken. Auf die hierbei stattfindenden Beziehungen wird in dem folgenden Paragraphen ausführlich eingegangen werden. Durch die Bedingung cotang $a = 1$ wird der synchrone Schwingungszustand des Systems gekennzeichnet.

---

*) Nach der althergebracht üblichen statischen Anschauungsweise der mechanisch-physikalischen Vorgänge gelangte man zu dem Begriff der Geschwindigkeit mittels Division der Raumstrecke durch die Zeit. Indem man von den analytischen Festsetzungen der Bewegungsformen ausging, gelangte man dazu, in der unmittelbaren Gleichung zwischen Raum und Zeit den Raum durch eine Funktion der Zeit auszudrücken. Man hat aber umgekehrt die Zeit als eine Funktion des Raumes, als ein Kraftstreckenverhältnis mit Bezug auf die mechanisch-physikalischen Vorgänge zu betrachten. Das räumliche Kraftfeld ist ausser uns objektiv vorhanden. Die Anschauungsform der Zeit ist aber ein Produkt unseres innerlichen seelischen Kraftfeldes. In logisch rationeller Weise, auf Grund des Kausalgesetzes hat man anzunehmen, dass die Geschwindigkeit und mit ihr die Kraftstrecke durch Summierung der aus der Selbstinduktion des Kraftfeldes hervorgehenden Impulse entsteht. Die Kantschen Definitionen des Raum- und Zeitbegriffes halten der heutigen Anschauung der Naturvorgänge gegenüber nicht mehr Stand und die von Lagrange auf rein mathematischem Wege gewonnenen Definitionen der Geschwindigkeit und Beschleunigung decken nicht die sich gegenwärtig aufdrängenden Begriffe der Bewegungsgrössen. Wir müssen von unserem heutigen Standpunkte aus den Raum als ein objektives Kraftfeld ansehen, aus welchem alle Erscheinungen hervorgehen.

Aus der Formel

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{v_2^2}{2} + v_1 v_2 \cos a$$

folgt $v_2 = v_1 (\sqrt{2} - 1) = \text{tang } 45/_2{}^\circ$, welche Beziehung schon auf S. 121 erörtert worden ist.

Die Grösse $\frac{3}{2} g^2$ entspricht dem Maximum der Kombinationskraft nach der Formel

$$4 v_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos a \qquad (3)$$

oder

$$\frac{3}{2} v_1^2 = \frac{v_2^2}{2} + v_1 v_2 \cos a, \qquad (4)$$

woraus folgt

$$v_1 = v_2.$$

Zur weiteren Erklärung ist noch Folgendes zu bemerken:

Wird für den ersten Fall unserer Betrachtung mit Bezug auf Gleichung (1) und (2) ein Massenelement, z. B. ein handgerechter Stein, vertikal in die Höhe geworfen, so gleicht sich dessen Wurfkraft mit der Schwerkraft aus und das Massenelement kommt im Maximum seiner Steighöhe momentan zum Stillstand, wobei sich das aus dem Massenelement und gravimotorischen Kraftfelde gebildete duale Kräftesystem im neutralen Zustande befindet, indem sich das durch die Winkelfunktion $\cos \varphi$ symbolisierte Kraftstreckenverhältnis relativ nulliert und die Kombinationskraft $R$ gleich der Kompensationskraft $S$ wird. Es ist alsdann für $R = S = U$ der durch die Formel

$$Uk = U^2$$

auszudrückende statische Zustand vorhanden (vergl. S. 134), welcher dem Moment der Entladung vorausgeht, unter welcher der emporgeworfene Stein zurückfällt, wobei das Kraftfeld sich strömend entladet, so lange eine als Leitung dienende Kapazität vorhanden ist, aber in der Entladung sozusagen explodiert, wenn ein als Selbstinduktion zu betrachtender Widerstand in den Weg tritt.

Wird dagegen der Stein vertikal abwärts mit der Geschwindigkeit $v$ geworfen, so hat das gravimotorische Kraftfeld das Potential $v^2$ zu entwickeln, um den seiner ursprünglichen Kraftsphäre entfliehenden Stein einzuholen. Für diesen Vorgang gelten die Gleichungen (3) und (4). Während also im ersten Falle die Wurfkraft die Masseneinheit auf das Potential $v^2$ bringen muss, um gegen die Strömungsrichtung des gravimotorischen Kraftfeldes die lebendige Kraft $\frac{v^2}{2}$ zur Wirkung zu bringen, muss im zweiten Falle das gravimotorische Kraftfeld das Potential $v^2$ entwickeln, um gegen die seinen relativ statischen Zustand störende Masse regelmässig wirksam zu werden. Diese störende Masse

tritt hierbei als eine die Raumkraft negierende Kapazität auf, so dass das gravimotorische Kraftfeld nur durch Geschwindigkeitsverdoppelung wieder wirksam werden kann, wobei es sich durch eine variable Periode hindurchzuarbeiten hat.

In beiden Fällen findet also während der variablen, durch die Vektorengleichung (1) gekennzeichneten Periode ein Potentialausgleich zwischen den beiden wirksamen Kraftfeldern statt, indem das gravimotorische Kraftfeld und das Kraftfeld der strömenden Masse ihre Wirkung nach dem Parallelogrammgesetz zusammensetzen. Im ersten Falle wird dadurch die störende Masseneinheit momentan zur Ruhe gebracht, das heisst: die Ladung des gravimotorischen Kraftfeldes ist vollendet und im nächsten Moment erfolgt nach entgegengesetzter Richtung die Entladung. Im zweiten Falle wird zur Herstellung des zweiten Potentials die Geschwindigkeit, das ist die Ladung der störenden Masseneinheit, verdoppelt. Im ersten Falle findet also bei ursprünglich entgegengesetzter Polarität Anziehung und dann Abstossung zwischen den beiden wirksamen Kraftfeldern statt. Im zweiten Falle ist von Anfang an die Polarität gleichnamig und daher besteht die gegenseitige Wirkung der beiden Kraftfelder nur in Abstossung. Hierdurch ist die Gleichartigkeit in der gegenseitigen Wirkung gravimotorischer und elektromagnetischer Kraftfelder, welche schon Faraday vermutete, aber vergeblich nachzuweisen versuchte, nachgewiesen. Die variable Periode des Gegeneinanderwirkens führt demnach den noch mangelnden Ausgleich zwischen Wirkung und Gegenwirkung durch den Ausgleich der Intensitäten herbei und wird durch die Formel

$$p \cos \alpha = q \sin \alpha$$

charakterisiert, wobei für den Ausgleich $\alpha = 45^\circ$ zu setzen ist, um den Synchronismus im Schwingungszustande der beiden Kraftfelder zu kennzeichnen. Durch die auf Grund des Parallelogrammgesetzes entwickelte allgemeine Kräftegleichung

$$R^2 - S^2 = 2\,R\,S \operatorname{cotang} \alpha \cos \varphi$$

wird die variable Periode, das ist der dynamische Zustand eines Massen- oder Kräftesystems, charakterisiert. Für $\alpha = 45^\circ$ wird $\operatorname{cotang} \alpha = 1$ und dadurch diese Formel auf den Ausdruck des relativ statischen Zustandes reduziert, der für $\cos \varphi = 1$ in den absolut statischen Zustand übergeht. Dieser absolut statische Zustand, die Eutropie, verschmilzt die gegen einander arbeitenden beiden Kraftfelder zu einem Kraftfelde, indem der Wirkungsgrad des Systems nach der Formel

$$\cos\varphi = \frac{2 v_1 v_2 \sin a}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4 v_1^2 v^2 \cos^2 a}}$$

bezw. nach der Formel

$$\sin\varphi = \frac{v_1^2 - v_2^2}{\sqrt{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4 v_1^2 v_2^2 \sin^2 a}}$$

durch Ausgleich der Potentiale $v_1^2$ und $v_2^2$, bezw. durch Ausgleich der lebendigen Kräfte $\frac{v_1^2}{2}$ und $\frac{v_2^2}{2}$ in den Maximalwert Eins eintritt. Quadriert man beide Gleichungen, um das Wurzelzeichen im Nenner des zweiten Gliedes zu beseitigen, so geht daraus hervor, dass bei Übergang der Wirkung des inneren Kraftfeldes in den passiven, durch den Wirkungsgrad $\sin^2\varphi = 0$ gekennzeichneten Zustand der Wirkungsgrad des äusseren Kraftfeldes für die unendliche Annäherung der Kraftdifferentialquotienten $v_1$ und $v_2$, deren Bedeutung durch $\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dv} = v$ gekennzeichnet ist, noch keineswegs in den maximalen Wirkungsgrad, der eine Konstantladung des Systems bedeutet, übergeht, denn indem $\cos\varphi$ sich der Grenze „Eins“ unendlich nähert, wird $\cos^2\varphi$ von diesem Grenzwert zurückgeschoben. Das System unterliegt also einer fortdauernden Aggregationskraft eines äusseren Kraftfeldes.

Aus der Formel

$$f = gt + g/_2$$

folgt auch, dass die beschleunigende Wirkung, das ist die Selbstinduktion des gravimotorischen Kraftfeldes oder sonst eines als konstant erachteten Kraftfeldes im Verlauf der Zeit, oder — was gleichbedeutend ist — im Verlauf der Kraftstrecke relativ abnimmt, denn die Wirkung verteilt sich auf ein successiv wachsendes Zeitintervall bezw. auf eine successiv wachsende Kraftstrecke.

Es ist dies der Vorgang, welchen Helmholtz durch die bekannte Formel zur Symbolisierung der variablen Periode des elektrischen Stromes aufgestellt hat (vergl. S. 36).

88. Aus den für die Kombinationskraft $R^2$ und die Kompensationskraft $S^2$ eines dualen Massen- oder Kräftesystems aufgestellten Grundformeln:

$$R^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos a$$
$$S^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos a$$

ergeben sich für $v_1 = v_2 = v$, das ist für den Ausgleich der Kraftdifferentiationen zwischen den beiden Kraftfeldern die Formeln:

$$R^2 = 2 v^2 (1 + \cos a) = 4 v^2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$S^2 = 2 v^2 (1 - \cos a) = 4 v^2 \sin^2 \frac{a}{2},$$

woraus zur Darstellung der kleinsten lebendigen Kräfte folgt:

$$\frac{R^2}{4} = v^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{ und } \frac{S^2}{4} = v^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Es ist damit das dem Sinus-Cosinus-Gesetz folgende schwingende Wechselspiel zwischen den beiden Kraftfeldern zum Ausdruck gebracht. Für $\alpha$ — 45° findet Synchronismus der Schwingungen statt, wodurch der relativ statische Zustand zwischen den beiden Kraftfeldern gekennzeichnet ist.

Die linearen Gleichungen

$$\frac{R}{2} = v \cos \frac{\alpha}{2} \text{ und } \frac{S}{2} = v \sin \frac{\alpha}{2}$$

lassen sich durch ein Diagramm darstellen.

In diesem Diagramm Fig. 14 hat der Zentriwinkel $aob = \alpha$ die Bedeutung des Geschwindigkeitswinkels (der Winkelgeschwindigkeit) und der über dem gleichen Bogen $ab$ stehende Peripheriewinkel $acb = \frac{\alpha}{2}$ die Bedeutung des Beschleunigungswinkels (der Winkelbeschleunigung). Es ist dieser Peripheriewinkel $\frac{\alpha}{2}$ als Kontingenzwinkel, der Zentriwinkel $\alpha$ mit Bezug auf einen vom Gipfel $c$ des Peripheriewinkels mit dem Radius $ca$ beschriebenen Kreises anzusehen. Übrigens sind diese Winkel mit Bezug auf pulsivische Kraftentfaltung als sehr klein zu denken. Hierbei ist daran zu denken, dass mit der Kreisbewegung fortwährende Richtungsänderungen und folglich auch Geschwindigkeitsänderungen bezw. also auch Kraftänderungen verbunden sind. Demzufolge befindet sich ein in einer Kreisbahn laufender Kraftpunkt, indem er dem Spiel zweier nach Neutralisation strebender, das heisst den Übergang in die rechtwinklige Lage suchender Kräfte unterliegt, in einem Schwingungszustande, der in radialer Richtung aus transversalen und in tangentialer Richtung aus longitudinalen Schwingungen zusammengesetzt ist. Insofern als bei diesem Vorgange natürlicherweise auch periodische Spannungsänderungen in der radialen Richtung des inneren Kraftfeldes auftreten, wird davon die Zentralkraft influiert und demzufolge muss der Massenmittelpunkt oder Trägheitsmittelpunkt des

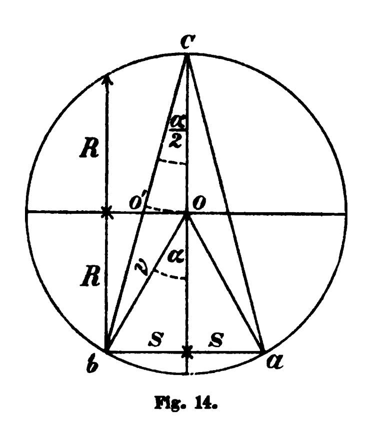



Fig. 14.

Systems an dem Schwingungszustande teilnehmen. Es findet diese Voraussetzung ihre Begründung in dem von Lagrange aufgestellten Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (S. 26).

In dem Diagramm Fig. 14 ist dieser Vorgang durch die Verschiebung des geometrischen Kreismittelpunktes $o$ nach dem sehr nahe liegenden Orte $o'$ veranschaulicht. Insofern aber die beschleunigende Kraft durch ihre Richtung die Lage des dynamischen Trägheitsmittelpunktes bezw. Schwerpunktes $o'$ des inneren Kraftfeldes bedingt und somit die Verschiebung dieses Punktes verursacht, durchläuft sie die Richtung des grössten Widerstandes. Mit Bezug auf die Drehung ist aber $o'$ der neutrale Punkt des Systems, in welchem die Wirkung und Gegenwirkung sich kompensieren, so dass die momentane Drehachse durch diesen Punkt hindurchgeht. Maximum und Minimum bedingen sich daher gegenseitig, wie auch Lagrange hervorgehoben hat. Nur wenn die Intensität des einen Wirkungsfaktors zum Minimalwerte herabsinkt, kann die Intensität des anderen Wirkungsfaktors sich zum Maximum steigern. Neben der gedachten Nullierung des einen Wirkungsfaktors tritt die imaginäre unendliche Grösse des anderen Faktors hervor. Dieses Zusammenwirken von Maximum und Minimum findet seinen Ausdruck in der Differentiation der lebendigen Kraft nach der Formel

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v \, . \, dv.$$

89. Die vorher mit Bezug auf den Peripheriewinkel $\frac{a}{2}$ entwickelten Formeln

$$\frac{R}{2} = v \cos \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \frac{S}{2} = v \sin \frac{a}{2}$$

besagen, dass die primären Intensitäten $v \cos \frac{a}{2}$ und $v \sin \frac{a}{2}$ des äusseren und inneren Kraftfeldes als Verursachung der resultierenden Wirkungen $\frac{R}{2}$ und $\frac{S}{2}$, die als Kraftstrecken charakterisiert sind, auftreten. Die kombinierende Wirkung, der Ladungsstrom $\frac{R}{2}$, ist aber als Selbstinduktion, die kompensierende Wirkung als Kapazität zu betrachten.

Um die Ausgleichung der Intensitäten anzudeuten setzen wir

$$R \sin \frac{a}{2} = 2v \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = v \sin a$$

$$S \cos \frac{a}{2} = 2v \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = v \sin a.$$

Für $a = 90^\circ$ folgt hiermit $R = S$ als Diagonalen eines Rechtecks.

Im Diagramm Fig. 15 finden diese Kräftebeziehungen ihren Ausdruck. Die Strecke $ab = R$ entspricht für einen sehr kleinen Winkel $a$

der vom äusseren Kraftfelde ausgehenden aggregierenden Zentralkraft des dualen Systems. Rechtwinklig dazu entfaltet sich in der Strecke $ac = S$ die freie (neutrale) kompensierende molekulare Wirkung des inneren Kraftfeldes gemäss dem von Gauss aufgestellten Prinzip des kleinsten Zwanges. Vom entgegengesetzten Standpunkte aus kann man jedoch diese Wirkungen auch als maximale Kraftdifferentiationen betrachten. Wir denken uns hierbei das System in Uhrzeigerrichtung rotierend. In radialer Richtung sind die Wirkungskomponenten $\frac{R}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{S}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, in tangentialer Richtung die Wirkungskomponenten $\frac{R}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{S}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

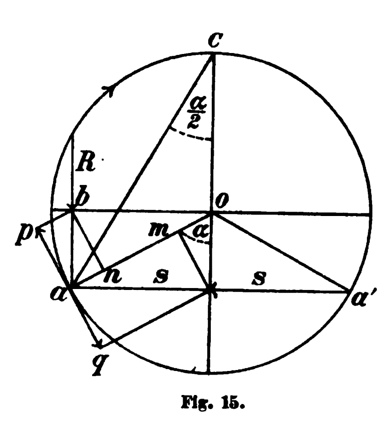



Fig. 15.

vorhanden. Setzt man nun $\frac{R}{2} = v\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{S}{2} = v\sin\frac{\alpha}{2}$, so erhält man für die Radialkomponenten:

$$an = \frac{R}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = v\cos\frac{\alpha}{2} \text{ und } am = \frac{S}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = v\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

und für die Tangentialkomponenten

$$aq = \frac{R}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = v\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

und

$$ap = \frac{S}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = v\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$ap = aq = v\sin\alpha.$$

90. Es sind im Folgenden noch einige Eigenschaften des Vektorenparallelogramms mit Bezug auf die vorher (S. 144) entwickelten Gleichungen

$$R^2 - S^2 = 2RS\operatorname{cotang}\alpha\cos\varphi \qquad (1)$$

$$\cos\varphi = \frac{2v_1v_2\sin\alpha}{\sqrt{(v_1^2+v_2^2)^2 - 4v_1^2v_2^2\cos^2\alpha}} \qquad (2)$$

hervorzuheben.

Quadriert man die zweite Gleichung und drückt man $\cos\varphi$ sowie $\cos\alpha$ durch den Sinus aus, so erhält man

$$\sin^2\varphi = \frac{v_1^2 - v_2^2}{(v_1^2 - v_2^2) + v_1^2v_2^2\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

Wird nun in einem beliebigen Parallelogramm der Resultantenwinkel, welcher sich der kleineren Parallelogrammseite $v_2$ gegenüber

befindet, mit $\gamma$ bezeichnet und dieser Winkel aus den drei Seiten $\frac{R}{2}$, $\frac{S}{2}$ und $v_2$ des betreffenden Dreiecks bestimmt, so erhält man

$$\cos\gamma = \frac{R^2 + S^2 - 4v_2^2}{2RS} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{\sqrt{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha}}. \quad (4)$$

Hieraus folgt, dass der Vektorenwinkel $\varphi$ gleich dem Komplementswinkel des Resultantenwinkels $\gamma$ ist, wobei $\gamma$ den von der Kombinationsresultante $R$ und der Kompensationsresultante $S$ gebildeten Winkel des ursprünglichen, aus den linearen Strecken der Kraftdifferentialquotienten $v_1$ und $v_2$ gebildeten Parallelogramms bezeichnet. Diese Resultanten sind daher bestimmt durch die Gleichungen

$$R = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha},$$
$$S = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha.}$$

Wird nun in Gleichung (2) $\cos\varphi = \sin\alpha$ gesetzt, so folgt daraus

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \cos\gamma$$

und daher bestehen auch die Gleichungen:

$$v_1^2 - v_2^2 = 2v_1 v_2 \cos\alpha = 2v_1 v_2 \cos\gamma = 2v_1 v_2 \sin\varphi.$$

Es wird hierdurch die Potentialdifferenz zwischen dem inneren und äusseren Kraftfeld ausgedrückt.

91. Die Gleichung

$$v_1^2 - v_2^2 = 2v_1 v_2 \cos\alpha,$$

welche aus der Bestimmungsgleichung des Vektorenwinkels $\varphi$ (S. 145) unter der Bedingung $\cos\varphi = \sin\alpha$ entwickelt wurde, ergiebt sich durch Einsetzung des Maximalwertes der Kombinationsresultante $R = v_1\sqrt{2}$ aus der Grundgleichung

$$R^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha$$

und lässt sich in der Form

$$v_1\sqrt{2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha} \quad (5)$$

durch ein Diagramm darstellen.

In Fig. 16 ist der äussere Kreis mit dem Radius $v_1\sqrt{2}$, der innere Kreis mit dem Radius $v_1$ beschrieben. Für einen beliebigen Winkel $aob = \alpha$ ist das Parallelogramm $oacb$ eingezeichnet, für welches nach obiger Voraussetzung die Gleichung (5) gilt:

Durch Verlängerung der Parallelogrammseite $ao = v_1$ bis $d$ ergiebt sich ein zweites Parallelogramm $ocbd$, dessen Kombinationsresultante $ob = v_2$ der Kompensationsresultante des aus den Linearkräften $mb$

und *mo* unter dem Winkel $\gamma$ zu bildenden Parallelogramms entspricht. Bezeichnet man den Winkel *cod* durch $\beta$, so ist

$$\alpha + \beta - \text{Winkel } boc = 180^\circ.$$

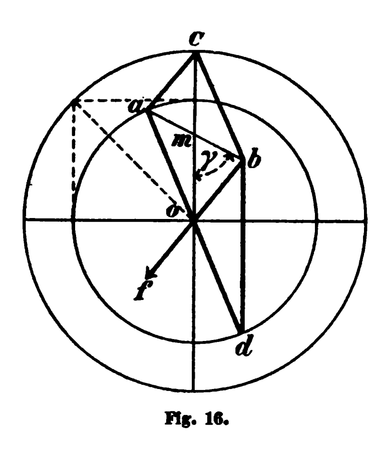



Fig. 16.

Für das Parallelogramm *ocbd* besteht die Gleichung

$$2 v_1^2 = v_2^2 - v_1^1 + 2 v_1^2 \sqrt{2} \cos\beta,$$

davon die obige Gleichung

$$2 v_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos\alpha$$

subtrahiert ergiebt

$$v_2 = v_1 \frac{(\sqrt{2}\cos\beta - 1)}{\cos\alpha}. \quad (6)$$

Für $\cos\beta = \cos\alpha = 1$, das ist für $\alpha = 0$ und $\beta = 180^\circ$ folgt die schon früher (S. 121) nachgewiesene Beziehung:

$$v_2 = (\sqrt{2} - 1)\, v_1,$$

wodurch der logarithmische Ausdruck für den adiabatischen Zustand gegeben ist und der Nachweis geliefert wird, dass die Kräfte überhaupt Exponentialfunktionen sind. Durch die identische logarithmische Gleichung

$$\log\left(\frac{T_0}{T_1}\right) = (\sqrt{2} - 1) \log\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

wird das Verhältnis der absoluten Temperaturen und das Verhältnis der spezifischen Volumina auf einerlei Basis, das ist auf die Basis des Kraftbegriffes, bezogen.

Für $\cos\alpha = 0$, das ist für $\alpha = 90^\circ$, geht der Winkel $\beta$ über in $135^\circ$, entsprechend dem Diagramm Fig. 17.

Durch Einsetzung der Werte $\cos\alpha = 0$ und $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergiebt sich aus der Gleichung (6) der unbestimmte Ausdruck

$$v_2 = \frac{0}{0} = k$$

in der Bedeutung der Konstanten des inneren Kraftfeldes, welche als eine Komponente der maximalen Wirkung des äusseren Kraftfeldes auftritt. Es gilt für diesen Fall die auf S. 193 gefundene Beziehung

$$\alpha = \gamma = \varphi.$$

Im allgemeinen gelten also die Gleichungen:

für das offensive Kraftfeld

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = v_1 v_2 \cos\alpha = v_1 v_2 \cos\gamma$$

und für das defensive Kraftfeld

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = v_1\, v_2 \sin\varphi.$$

In Fig. 18 gelten im allgemeinen dieselben Bezeichnungen wie in Fig. 16. Es ist demnach $oa = v_1$, $oc = v_1\sqrt{2}$, $ob = v_2$ und Winkel $aob = \alpha$. Ferner bezeichnen wir aber den Winkel $aoc$ mit $\frac{\Theta}{2}$ und nehmen an, dass dieser Winkel der halben Amplitude des schwingenden Systems entspricht. Mit Bezug hierauf gelten die Gleichungen:

$$2\,v_1^2 = v_2^2 - v_1^2 + 2\,v_1^2\sqrt{2}\cos\frac{\Theta}{2}$$

$$2\,v_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\,v_1\,v_2\cos\alpha,$$

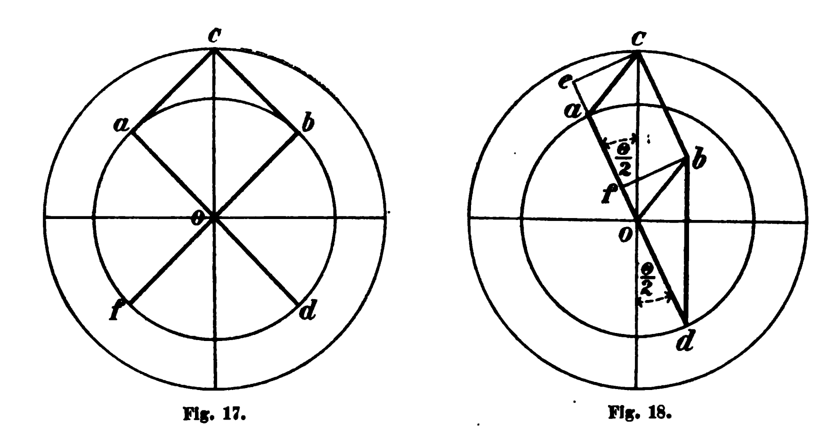



Fig. 17. Fig. 18.

woraus durch Subtraktion und Reduktion folgt:

$$v_2\cos\alpha = v_1\left(\sqrt{2}\,.\cos\frac{\Theta}{2} - 1\right).$$

Es entspricht diese Gleichung der auf S. 194 aufgestellten Gleichung (6), wobei aber $\cos\beta = \cos\frac{\Theta}{2}$ gesetzt ist.

Wird nun von $c$ aus und von $b$ aus eine Normale bezw. nach den Punkten $e$ und $f$ auf die Richtung $ad$ gezogen, so ergiebt sich die Bedeutung der entwickelten Formeln. Da aber die früher entwickelte Beziehung gilt:

$$\cos\alpha = \cos\gamma = \sin\varphi,$$

so kann man auch setzen:

$$v_2\cos\gamma = v_2\cos\varphi = v_1\sqrt{2}\cos\frac{\Theta}{2} - v_1,$$

wobei $v_1 \sqrt{2}$ der Kombinationsresultante des Parallelogramms $oacb$ entspricht. Es ergiebt sich hieraus, dass der Trägheitsmittelpunkt, bezw. der Schwerpunkt des Systems in der Radialrichtung $oa$ von der konstanten Kraft $v_1 \sqrt{2}$ und quer dazu von der variablen Kraft $ob = v_2$ einer schiebenden Wirkung ausgesetzt ist, so dass dieser Punkt im schwingenden Kräftespiel des Systems ebenfalls einer schwingenden Wirkung unterliegt.

92. Mit Bezug auf das gewöhnliche Kräfteparallelogramm $oacb$ (Fig. 19) mit dem Zusammensetzungswinkel $aob = \alpha$ kann man annehmen, dass die Reaktivwirkungen gegen die primären Linearkräfte $oa = v_1$ und $ob = v_2$ in der Richtung der Kombinationsresultante $oc = R$ zur Herstellung des momentanen Ausgleichs bis zum Punkte $c$ verschoben worden sind. Alsdann stehen die gleichen Kräfte $oa = v_2$ und $cb = v_2{}^1$, $ob = v_1$ und $ca = v_1{}^1$ in Wechselwinkeln einander gegenüber und bilden somit Kräftepaare, welche bei der Variation ihrer Intensitäten die Tendenz zur Drehung erzeugen. Durch Umkehrung des einen der beiden das Parallelogramm $oacb$ bildenden Dreiecke erhält man die Figur 20, worin die gleichen, Wirkung und Gegenwirkung vertretenden Linearkräfte an demselben Punkte angelangt sind und somit der in Fig. 19 dargestellte dynamische Zustand des Systems in den relativ statischen Zustand verwandelt worden ist, für welchen die Gleichungen gelten:

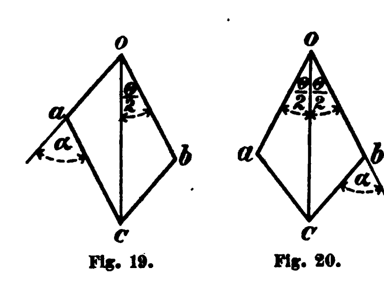


Fig. 19. Fig. 20.

$$2 v_1^2 = v_2^2 - v_1^2 + 2 v_1^2 \sqrt{2} \cos \frac{\Theta}{2}$$

$$2 v_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha,$$

woraus durch Subtraktion und Reduktion folgt:

$$v_2 \cos \alpha = v_1 \left(\sqrt{2} \cos \frac{\Theta}{2} - 1\right).$$

Dies ist die bereits direkt aus dem Kräfteparallelogramm entwickelte Beziehung zwischen den Kraftdifferentialquotienten $v_1$ und $v_2$.

93. Aus den im vorhergehenden ermittelten Beziehungen zwischen den Kräften und ihren Zusammensetzungswinkeln oder Phasenunterschieden folgt, dass das gewöhnliche Kräfteparallelogramm durch das

Resultantenparallelogramm mit dem Zusammensetzungswinkel $\gamma$ ersetzt werden kann, so dass anstatt der Formel

$$v_1^2 - v_2^2 = 2 v_1 v_2 \cos \alpha$$

ohne weiteres die Formel

$$R^2 - S^2 = 2 R S \cos \gamma$$

zu setzen ist. Für $\alpha = 45^\circ$ ist diese Formel mit der aus dem Vektorenparallelogramm abgeleiteten Formel

$$R^2 - S^2 = 2 R S \sin \varphi$$

identisch, weil die Beziehung besteht:

$$\alpha = \gamma = \varphi = 45^\circ.$$

Geht man auf die (S. 143) entwickelte Herleitung der Vektoren

$$P = R \cos \alpha \text{ und } Q = S \sin \alpha$$

zurück, so ist deren Begriff durch die auf S. 191 entwickelten Formeln

$$R \cos \frac{\alpha}{2} = 2 v \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{ und } S \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 v \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

definiert, indem dadurch der Winkel $\alpha$ als die Amplitude, das heisst als der Schwingungswinkel der Kräfte gekennzeichnet wird.

Für $\alpha = 90^\circ$ werden die Vektoren gleich und es ist im Schwingungszustande Synchronismus vorhanden, das heisst: das System befindet sich im relativ statischen Zustande, wobei die Resultanten die Bedeutung der Vektoren gewinnen. Die Vektoren sind daher im allgemeinen als die in der variablen Periode auftretenden veränderlichen, von der verschiedenen Intensität der Kraftentfaltung der beiden der Ausgleichung zustrebenden Kraftfelder abhängigen Resultanten des Systems anzusehen. Da nun die Resultanten der sich zusammensetzenden Kraftfelder durch die Grundformeln

$$\frac{R^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + v_1 v_2 \cos \alpha$$

$$\frac{S^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} - v_1 v_2 \cos \alpha$$

gegeben sind, so wird dadurch die duale dynamische Natur der zusammen wirkenden Kraftfelder charakterisiert und deren Gegensatz als Wirkung und Gegenwirkung in Selbstinduktion und Kapazität angedeutet. Im Ausgleich beider Kraftfelder entwickelt sich alsdann nach dem Prinzip des kleinsten Zwanges der sogenannte Widerstand, wo aber neben dem Minimum zugleich ein Maximum vorhanden ist, denn nach der Formel

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v \cdot d v$$

wird bei Eintritt des einen Kraftfaktors in den Minimalwert der andere Kraftfaktor zum Maximalwert sich steigern, wie dies aus dem Prinzip der Erhaltung der Kraft gefolgert werden muss. Es kommt dann das auf S. 11 besprochene, von Lejeune-Dirichlet aufgestellte Prinzip der relativ widerstandslosen Geschwindigkeit zur Geltung, wie dies auch aus den Bemerkungen auf S. 197 hervorgeht. Jeder Widerstand, sei er positiv oder negativ gedacht, bedingt eine Änderung in der Kraftentfaltung. Der negative Widerstand, als Kapazität, löst die Kraftstärke im Maximum aus und bringt sie auf ein Minimum. Für den positiven Widerstand, die Selbstinduktion, beginnt die Gegenwirkung mit dem Minimum und endet mit dem Maximum, somit kann der Widerstand unter dem Begriffe der Geschwindigkeit oder des Druckes aufgefasst werden. In beiden Fällen ist er ein Faktor der Kraftentfaltung und keineswegs ein Hindernis, wie man nach der üblichen Auffassung anzunehmen geneigt ist*). In der variablen Periode, die Hamilton durch Aufstellung seines tiefsinnigen Prinzips (the law of varying action) charakterisiert hat, treten in der freien Kraftentfaltung im Sinne der Kapazität und Selbstinduktion die Vektoren ins Spiel, welcher Vorgang durch die Formel

$$\frac{R^2 - S^2}{2} = R\,S \text{ cotang } \alpha \cos \varphi$$

ganz allgemein charakterisiert wird. Es ist dies die Form der berühmten Maxwellschen dynamischen Gleichungen. Giebt man dieser Gleichung die Form

$$\frac{R^2}{2} = \frac{S^2}{2} = R\,S \text{ cotang } \alpha \cos \varphi,$$

so entspricht sie der Form, welche W. Weber bei seinem Versuch zur Aufstellung einer allgemeinen Kräftegleichung wohl anstrebte, aber nicht zum richtigen Ausdruck brachte. Es entspricht diese Formel auch dem sogenannten Dopplerschen Gesetz, welches bei Bewegungskombinationen, also insbesondere auch in der Elektrodynamik, zur Geltung kommt, wo bei der sogenannten Fernewirkung durch die Bewegung des motoriellen Substrats beeinflusst zu sein scheint.

Aus dieser rationell entwickelten Vektorengleichung wurde auf S. 160 die für den statischen Strahlungsvorgang gültige, mit der von

*) In der Kommission der British Association, welche zur Begutachtung und Vervollständigung der elektrischen Masseinheiten im Jahre 1892 eingesetzt worden war, äusserte sich Prof. Lodge (nach dem Electrician vom 5. August 1892 p. 371) dahin, dass die Einheiten des Volt und Ampère als „active things" für den Elektrotechniker die grösste Wichtigkeit hätten, wogegen das Ohm verhältnismässig einen akademischen Charakter besitze und nicht als „vivide and active" zu betrachten sei. — Dieser Ausspruch charakterisiert die unklare und unrationelle Anschauungsweise, welche selbst bei berühmten Elektrikern über den Kraftbegriff heutzutage herrschend ist.

Clapeyron für Wärmestrahlung empirisch aufgestellten und dann von Gauss und Kirchhoff für andere Strahlungsvorgänge benutzten Formel identische Gleichung

$$Q = \pm k \frac{dS}{da} F$$

abgeleitet. Hiermit ist der Beweis geliefert, dass die von dem Verfasser nach dem gewöhnlichen Prinzip der Kräftezusammensetzung aus dem Parallelogrammgesetz abgeleitete Formel als die für Dynamik und Statik geltende Grundformel der Mechanik zu gelten hat und an Stelle der von Lagrange aufgestellten, aus der Statik abgeleiteten Grundformel der Kraftwirkungen zu setzen ist. Die von dem Verfasser aufgestellte, aus der Dynamik abgeleitete Formel beruht auf der von Lagrange anerkannten Voraussetzung, dass die virtuellen Momente die elementaren möglichen Kräftewirkungen sind, von welchem Gedanken auch schon Galilei bei der Begründung der Dynamik und insbesondere bei der Aufstellung des Kraftbegriffs ausgegangen ist. Seine klaren Anschauungen sind aber im Verlaufe der Zeit verdunkelt worden.

---

## Anhang.

# Bemerkungen zur Farbentheorie.

Schon die altgriechischen Philosophen haben über die Ursache der Farbenbildung nachgedacht. Am klarsten hat sich wohl zuerst Plato in dieser Beziehung ausgesprochen, indem er die Farbe als etwas aus der Empfindung Entspringendes bezeichnet und meint, durch das Weisse werde das Sehvermögen entbunden, durch das Schwarze gebunden oder gesammelt.

Aristoteles, der fleissige Sammler, hat wohl schliesslich alles, was im Altertum über die Entstehung der Farben philosophiert worden ist, in seinen Schriften zusammengetragen. Aus dem, was davon uns überkommen ist, geht hervor, dass die antiken Philosophen im allgemeinen als Ursache der Farbenbildung den Gegensatz von Weiss und Schwarz angenommen haben. Das Sammeln und Entbinden des Auges durch Licht und Finsternis, sowie der Einfluss von der Dauer des Eindrucks war ihnen bekannt und sie hatten einen Begriff vom Abklingen der Farben. Aristoteles würdigte schon die Wichtigkeit des Prinzips der Wirkung und Gegenwirkung im Dualismus des Naturwirkens. Er erkannte auch die Wichtigkeit, welche der Mitwirkung des Mediums zukommt. Aus alledem geht hervor, dass die Alten Licht und Finsternis, Weiss und Schwarz, einander entgegenstellten und dass sie die Entstehung der Farben der Wechselwirkung zwischen diesen beiden Gegensätzen zuschrieben. Aristoteles betont diesbezüglich, dass dabei aber nicht von einer gewöhnlichen Mischung die Rede sein könne.

Obschon somit genügende Andeutungen darüber gegeben waren, dass durch den Kontrast von Schwarz und Weiss im raschen Wechsel ein Entstehen von Farbenerscheinungen zu ermöglichen sei, so war doch ein namhafter Physiker, der verstorbene Professor Fechner in Leipzig, sehr darüber verwundert, als er zufällig nach dieser Methode Farbenerscheinungen bemerkte.

Fechner benutzte im Jahre 1838 zum Zweck physikalisch-optischer Versuche eine schwarz-weisse Scheibe, von der Art, wie sie in Fig. 21 abgebildet ist. Er bezog sich dabei auf eine bereits vom Engländer Talbot benutzte Methode, auf welche derselbe ein neues photometrisches Verfahren zu begründen suchte, indem er auf einer rotierenden schwarz-weissen Scheibe, wie solche in verkleinertem Massstabe Fig. 22 zeigt, eine systematische Aufeinanderfolge von grauen ins Schwarze übergehenden Farbentönen zur Vergleichung und Abschätzung der Beleuchtungsgrade hervorrief*).

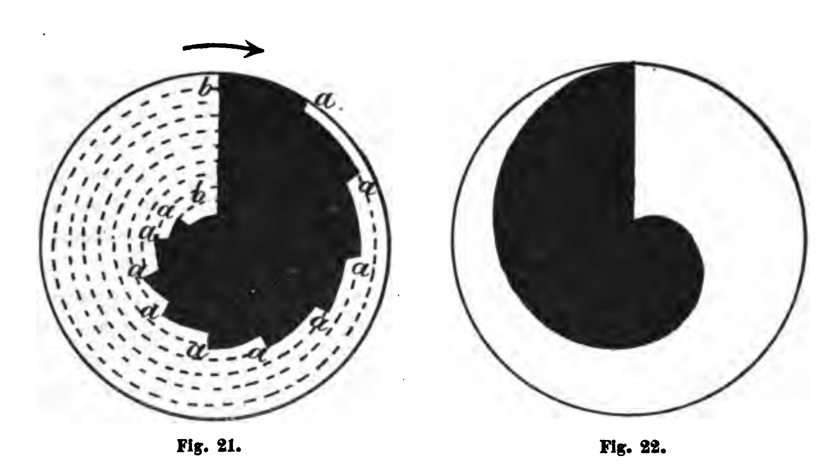



Fig. 21. Fig. 22.

Fechner berichtet über seine Beobachtungen Folgendes**):

Die mit einem Rotationsapparate betriebene Scheibe hatte 28 par. Zoll Durchmesser und war in achtzehn konzentrische Kreise eingeteilt. Der innerste Kreis war ganz schwarz, der nächste enthielt einen schwarzen Sektor von 20°, der folgende von 30° und so weiter, wie es die Abbildung Fig. 21 zeigt, wobei aber die Scheibe nur in zwölf konzentrische Kreise geteilt worden ist, von denen zwei den inneren schwarzen Kreis bilden.

Fechners Bericht lautet im weitern wörtlich:

„Als nun diese Scheibe gedreht wurde, war ich erstaunt, anstatt Abstufungen reinen Graues allerhand von der Mitte nach dem Umfange, sowie nach der Beschaffenheit der Drehungsgeschwindigkeit sich verändernde Farben wahrzunehmen, die für mein Auge zwar nicht von starker Intensität, aber doch nicht ohne Lebhaftigkeit waren.

*) Poggendorffs Annalen, Bd. 35 (1835), S. 465 u. f.
**) Poggendorffs Annalen, Bd. 45 (1838), S. 327 u. f.

„Ich habe dieses Phänomen vielen Personen gezeigt und dabei gefunden, dass es von ihnen mit sehr ungleicher Deutlichkeit gesehen wurde. Einige meinten die Farben brillant, andere vermochten kaum etwas davon zu sehen.

„Gesetzt, die Scheibe (Fig. 21) bewege sich in der Richtung des Pfeils (das ist mit den Zacken nach vorwärts), so tritt für das als unbeweglich vorausgesetzte Auge bei *a* Schwarz an die Stelle des Weiss, welches einen Augenblick vorher dort erblickt wurde. Der Eindruck des soeben erblickten Weiss verschwindet nun sofort im Auge, und zwar nimmt er nicht für alle Farbenstrahlen, welche das weisse Licht zusammensetzen, gleich schnell ab, wie sich auch durch andere Thatsachen (namentlich das Farbenverklingen im geschlossenen Auge nach dem Verschwinden heller Bilder) genügend darthun lässt. Die Farben erlöschen nun nach einander im Auge mehr oder weniger, dass bei fortgesetzter Drehung der Rand *b* an die Stelle von *a* kommt und neues weisses Licht mit sich führt. So wie aber der Eindruck der verschiedenen Farbenstrahlen verschieden schnell verschwindet, scheint er sich anderseits auch bei Eintritt von Licht und Dunkelheit mit verschiedener Schnelligkeit wieder geltend zu machen, so dass hierdurch ein neuer Grund zu Farbenerscheinungen entsteht. Je nach der Disposition des Auges, dem Abstand zwischen *a* und *b* (Fig. 21) und der Schnelligkeit der Drehung muss natürlich schon ein grösserer oder geringerer Anteil von Farben im Auge erlöscht sein, bis neues Licht das Auge trifft und die neueintretende Farbenerscheinung sich mit der partiell erlöschten zusammensetzt, und dies bedingt die Veränderlichkeit der Erscheinung u. s. w.“ —

Dies ist die Quintessenz der Fechnerschen Beobachtungen und Auseinandersetzungen. Derselbe meint schliesslich, wenn Goethe diese Erscheinungen wahrgenommen hätte, so würde derselbe sofort eine Bethätigung seiner Hypothese über die Entstehung der Farben darin gefunden haben. Es sprächen jedoch diese Erscheinungen keineswegs zu gunsten der Goetheschen Ansicht, denn man könne dieselben sehr gut durch die Newtonsche Hypothese erklären.

Die Newtonsche Hypothese beruht aber auf der absurden Annahme der Vielfarbigkeit des einfarbigen Lichts. In den physikalischen Lehrbüchern wird gesagt: Weil das auf das Prisma auffallende weisse Sonnenlicht aus sieben Farben zusammengesetzt ist, so entsprechen diese Farben verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, also verschiedenen Brechungsexponenten, und daher werden sie im Prisma verschieden abgelenkt und das Licht tritt in Farbenzerstreuung heraus.

Dagegen ist darauf hinzuweisen, dass die Lichtstrahlen nichts weiter als Kraftstrahlen sind, welche sich nach dem Parallelogrammgesetz zusammensetzen. Will man das weisse Licht als die Resultante von sieben verschiedenen Lichtfarbstrahlen ansehen, so sind diese sieben verschiedenen Kraftstrahlen, deren Verschiedenheit in der Richtungsverschiedenheit liegt, im resultierenden weissen Licht in eine Richtung gebracht und zu einem einheitlichen Kraftstrahl verschmolzen worden, welcher als die Resultante des Systems auftritt. Die unlogische Annahme, dass weisses Licht zugleich vielfarbiges Licht sei, muss daher aus den physikalischen Lehrbüchern eliminiert werden. Nicht deshalb, weil das weiss erscheinende Sonnenlicht aus sieben verschiedenfarbigen Lichtstrahlen zusammengesetzt ist, wird es im Spektrum zerstreut, sondern die Zerstreuung tritt deshalb ein, weil die ursprünglich gleichartigen Lichtstrahlen beim Durchgange durch das Prisma relativ verschiedene Kraftstrecken durchlaufen müssen und daher Gegenwirkungen unterliegen, welche von den Längen- und Richtungsverhältnissen dieser Kraftstrecken abhängig sind. Hierbei ist zu beachten, dass im Verlauf des Lichts durch die verschiedenen Kraftstrecken die benachbarten Wellenzüge sich seitlich verschiedenartig beeinflussen, wodurch Phasenverschiebungen und Intensitätsänderungen verursacht werden.

In Fig. 23 ist der Querschnitt eines Prismas mit dem Brechungswinkel $mom' = \varphi$ dargestellt; gegen die Einfallfläche $mn$ treffen zwei parallele und daher auch gleichartige weisse Sonnenstrahlen $Ss$ und $S's'$ unter dem gegen die Normale der Einfallfläche gemessenen Winkel $\alpha$. Diese Strahlen werden normal und rechtwinklig zur Einfallfläche $mo$ zerlegt. Wir nehmen an, dass die in die Richtung der Einfallfläche fallende Komponente des der brechenden Kante $o$ des Prismas zunächst liegenden Strahles $S's'$ durch die Kante $o$ begrenzt werde und dass die entsprechende Komponente der folgenden Strahlen dieser ersten Komponente in der Länge gleich sind, so dass $os' = s's$ ist. Die normal zur Einfallebene gerichtete Komponente des

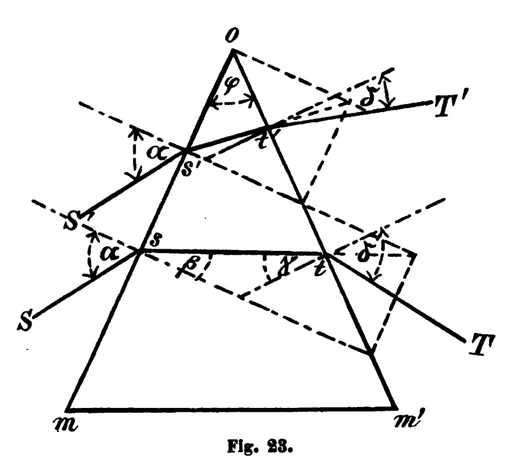


Fig. 23.

eindringenden Strahls wird durch die Austrittsebene $o\,m'$ des Prismas begrenzt. Die so bestimmten Drehungskomponenten ergeben nach dem Parallelogrammgesetz die Richtung des gebrochenen Strahls $T_1\,T^1$, welcher bei seinem Austritt an der Fläche $m'\,n$ nach dem Gesetz

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = n,$$

unterliegt, wobei $n$ den Brechungsexponenten des brechenden Mediums bezeichnet. In Fig. 23 sind die Brechungswinkel $\delta$ nach diesem Verhältnis, aber ohne Rücksicht auf einen vorher bestimmten Brechungsexponenten aufgetragen. Es geht hieraus hervor, dass das Verhältnis der Intensitäten trotz der Änderung der Kräfte sich gleich bleibt. Indem eine Hintereinanderschaltung der Querverschiebungen der einfallenden Strahlen stattfindet, ist in der That der Brechungswinkel, wie dies die Erfahrung gelehrt hat, von der Länge der normalen Einfallstrecke, das heisst von der Dicke des brechenden Mediums unabhängig.

Hiermit ist der bisher als Dogma geltende totale Widerspruch, dass das einfarbige Licht zugleich vielfarbig sei, beseitigt und der rohe, den Grundgesetzen der Mechanik Hohn sprechende Vergleich des sog. siebenfarbigen weissen Lichtstrahls mit einem aus sieben verschiedenfarbigen Fäden zusammengedrehten Seil, auf dessen Einfall einige nach Popularisierung der Wissenschaft strebende Physiker sich vielleicht sogar etwas einbildeten, wird unnötig. Alle erfahrungsmässigen Thatsachen der Optik müssen sich ohne die absurde Annahme, dass das weisse Licht zugleich ein siebenfarbiges Licht sei, ganz ungezwungen auf Grund rein mechanischer Gesetze erklären lassen.

Nach der Brechungskante $o$ zu werden die von den gebrochenen Strahlen zu durchlaufenden Kraftstrecken immer kürzer; endlich wird der durch das in seinen Weg tretende Medium in seiner Fortpflanzungskraft gestörte Strahl mehr und mehr wieder freies Spiel gewinnen und sich daher mit seinem Maximaldruck rechtwinklig gegen die Austrittsebene $o\,m'$ stellen, wodurch seine positive Fortpflanzungsgeschwindigkeit in das Maximum eintritt, insofern dem aus dem Prisma austretenden Strahle der äussere Ätherraum sich als störendes Medium entgegenstellt, so dass eine neue plötzliche Ablenkung von der gewonnenen Bewegungsrichtung erzwungen wird. In der That pflanzt sich der rote Lichtstrahl mit den längsten Wellen im Raume fort.

Nach der Unterkante $m$ der Eintrittsebene des Prismas, wo die dem einfallenden Lichtstrahle sich entgegenstellenden Kraftstrecken des seine Fortpflanzung hemmenden Mediums immer länger werden, wird endlich an einer Stelle die störende Wirkung des Mediums zum Maximum, so dass der Strahl eine zur Eintrittsebene normale Ablenkung erleidet und

daher mit minimaler Geschwindigkeit, als das in relativ kleinster Wellenlänge sich fortpflanzende ultraviolette Licht zur Wahrnehmung kommt.

Mit Berücksichtigung dieser Ausführungen sind die Farbenerscheinungen auf der rotierenden schwarz-weissen Scheibe leicht erklärlich; dieselbe ist etwa in 12—15 cm Durchmesser nach der Zeichnung, wie sie Fig. 24 zeigt, herzustellen, jedoch kann man die konzentrischen schwarzen Kreisbogen in ihrer Anordnung beliebig abändern, um die Farbenerscheinungen durch vielfache Beobachtungen zu studieren; auch die Grösse des schwarzen Feldes kann man abändern. Unzweifelhaft beruhen diese Farbenerscheinungen auf dem Kontrast von Weiss und Schwarz, bezw. Hell und Dunkel oder Licht und Schatten, wie auch Goethe nach Platos Vorgange angenommen hat. Die schwarzen Streifen sind in etwa 3 mm Breite herzustellen, bei guter Beleuchtung durch zerstreutes Tageslicht und nicht zu rascher Drehung treten alsdann sehr lebhafte Farbenerscheinungen auf.



Fig. 24.

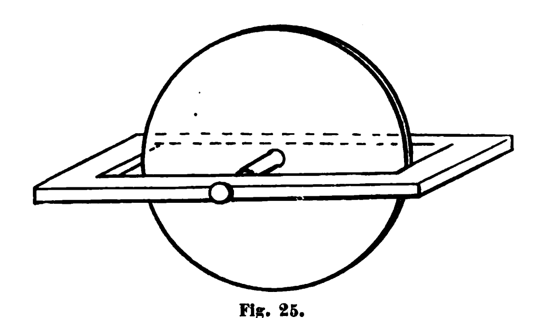


Fig. 25.

Die in der Drehungsrichtung unmittelbar in den weissen Teil der Scheibe eintretenden schwarzen Kreisbogen erscheinen dunkelviolett und ihre weissen Zwischenräume zeigen oft, das heisst bei entsprechender Beleuchtung, entsprechender Drehungsgeschwindigkeit und wohl auch entsprechender Beschaffenheit des Auges, ein schönes lebhaftes Blau. Die in der Drehungsrichtung in den schwarzen Teil der Scheibe

unmittelbar eintretenden schwarzen Kreisbogen erscheinen unter günstigen Umständen im schönsten Zinnoberrot bis Purpurrot. Die durch einen weissen Zwischenraum vom schwarzen Felde der Scheibe beiderseits getrennten schwarzen Kreisbogen erscheinen, je nach Umständen, die ziemlich verwickelter Natur sind, grün, gelb oder bräunlich, meist herrscht aber das Grün vor, besonders bei transparenten Scheiben im durchfallenden Lichte.

Die Rotation der Scheibe kann mittels des in Fig. 25 abgebildeten einfachen, aus einem Rahmen bestehenden Apparats bewirkt werden, in welchem die Scheibenachse zwischen zwei Spitzen läuft und durch Abziehen eines darumgewickelten Fadens in bekannter Weise in Umdrehung versetzt wird.

Es ist nun daran zu erinnern, dass alle Licht- und Farbenerscheinungen eben so wie die Tonempfindungen in das Gebiet der physiologischen Optik gehören und eigentlich psychologischer Natur sind. Durch das weisse Kraftfeld wird das Sehorgan gebunden, durch das schwarze Kraftfeld wird es ausgelöst. Es sind aus unserer Organisation hervorgehende Anschauungsformen äusserer Vorgänge von rein mechanischer qualitativ gleicher und nur quantitativ verschiedener Natur.

Das weisse und im allgemeinen farbige Licht beruht auf der mehr oder minder grossen Vereinigung der Lichtstrahlen durch Parallelschaltung im Nervensystem des Sehorgans. Der relativ einfache durch die Hintereinanderschaltung von wellenartigen Schwingungen gebildete Strahl wird vom Sehorgan nicht mehr wahrgenommen und könnte daher als schwarzer Kraftstrahl bezeichnet werden, indem man darunter die Urimpulse des ätherischen Kraftfeldes versteht, welche möglicherweise als Aggregationskraft in der Gravitation beziehungsweise Schwerkraft wirksam sind. Jedenfalls liegt hier noch ein weites Feld für weitere Forschungen offen.

# Register.

Druck von J. J. Weber in Leipzig.


QC173
S3
219531
Schwartze

